Bevezetés az Algebrába 2 **Házi feladatok, 6. adag** **2026. márc. 23 - márc. 30.**

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Legyen K test, $A \in K^{n\times n}$. Igazold, hogy minden (akármilyen nagy) $m \in \mathbb{N}$-re van olyan legfeljebb $n-1$-edfokú $p \in K[x]$, hogy $A^m = p(A)$.
2. Igazold, hogy az előző feladat állítása nagyon nem marad érvényben polinom-elemű mátrixokra: azaz igazold, hogy ha $n \geq 1$ tetszőleges, és $A \in (\mathbb{R}[x])^{n\times n}$ olyan polinom-elemű mátrix, melynek minden eleme csupa pozitív együtthatós polinom, és A elemei között van legalább 1 darab legalább elsőfokú, akkor van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy semmilyen legfeljebb $n-1$-edfokú p polinomra nem teljesül az $A^m = p(A)$ egyenlőség.
3. Legyen V a legfeljebb 2026-edfokú valós együtthatós polinomok vektortere, és legyen $\varphi : V \to V$,
$$\varphi(p) = p \text{ osztási maradéka } (x^2 + 3x - 4)\text{-el.}$$
Határozd meg φ minimálpolinomját.
4. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Határozd meg az $A^3 - 3A^2 + 3A - I$ mátrixot.

Április 1.-i játék

Április 1 körül fordított napot tartunk: Te adhatsz fel nekem házi feladatot - ez természetesen nem kötelező, de ha van kedved, örülnék, ha részt vennél ebben a játékben. A játékszabályok a következők.

1. Hallgatónként 1 feladatot vállalok (összesen legfeljebb 37-et). Ha szeretnél adni házi feladatot nekem, akkor 2026 március 30.-án, az előadás előtt, a 6. adag házi feladataiddal együtt írásban (de külön lapon, a házi feladataidtól elválasztva) add be a feladatot. Lesz egy külön dosszié, amiben ezeket gyűjtöm.
2. Olyan feladatot adj be, amelynek ismered egy maximum 2 (kézzel írt) oldal terjedelmű megoldását, mely legfeljebb a matematikus alapképzésben (vagy ennél is korábban) tanított tételekre hivatkozik, a további gondolatok pedig elférnek 2 oldalon.
3. A kérdésed jöhet a matematika bármilyen területéről. Lehet nehéz, lehet érdekes, amilyet csak szeretnél.
4. A kérdésed lehetőleg legyen rövid, világos (de ha a lényeghez tartozik, lehet kerettörténete, "meséje", ekkor nem baj, ha hosszabb). Ha szokatlan definíciókra épít a kérdés, röviden add meg a definíciókat is.
5. A megoldásokat írásban készítem el a tavaszi szünet utáni első előadásig (2026 április 13-ig).
6. Nem adok részletes megoldásokat. A válaszaimat addig dolgozom ki, ahonnan már könnyű befejezni, vagy egyszerű számolással befejezhető a megoldás (pl. hosszú számolásokat igénylő, de koordinátageometriai eszközökkel megoldható feladatokra lakonikusan mindössze annyit fogok válaszolni, hogy "Koordinátageometria."). Minden más szempontból a lehető legjobban szeretném teljesíteni a saját szokásos elvárásaimat.
7. Fenntartom magamnak a jogot, hogy beismerjem: egyes feladatokat nem tudtam megoldani. Ilyenkor meg fogom kérdezni a megoldást, mert szeretnék tanulni.
8. Ha részt veszel a játékban, képzetes házifeladat-pontokat adok (1 feladat $2i$ pontot ér). Ha a feladatot nem tudtam megoldani, akkor a Te helyes megoldásod megismerése után - amennyiben az nem hosszabb 2 (kézzel írt) oldalnál -adom meg a képzetes pontokat.