Bevezetés az Algebrába 2 **2 darab minta-feladatlap a 2. ZH-hoz** **2026 máj. 6.**

1. Feladatlap

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Mi a nyoma és determinánsa annak az $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixnak, melynek 1 és $2+i$ is sajátértéke?

2. Add meg, hogy hasonlóság erejéig hány darab olyan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix van, melynek minimálpolinomja
$$m(x) = (x-1)^2(x+4)^3,$$
ha $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, illetve $n = 7$. Az utolsó 3 esetben add meg az összes, páronként nem hasonló, megfelelő méretű Jordan-alakú mátrixot.

3. Adj meg ortonormált bázist az $\mathbb{R}^4$ tér $\underline{v}_1 = (1,0,1,1)$ és $\underline{v}_2 = (2,1,3,1)$ vektorok által kifeszített W alterében, és ennek segítségével számítsd ki a $\underline{c} = (0,0,0,3)$ vektor merőleges vetületét W-re.

4. Add meg a $q(x,y) = x^2 - 6xy + y^2$ kvadratikus alakot a
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
bázisban.

5. Add meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ SVD-felbontását.

6. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Igazold, hogy a következő 2 állítás ekvivalens:
   (a) A szimmetrikus
   (b) vannak olyan Givens-forgatások, melyek szorzatát G-vel jelölve $G^{-1}AG$ diagonális.

Megjegyzések.

1. A 2. ZH anyaga az, ami a 6-12 héten (2026 március 16-tól május 11-ig) előadáson és gyakorlaton elhangzott/elhangzik. A ZH-ban lehetnek olyan típusú feladatok, melyek ebben a mintaZH-ban nem szerepelnek.

2. A minta-ZH feladatai mind újak, hogy legyen muníció gyakorolni. A ZH-n 6 feladat lesz.

3. A 6.-12. adag házi feladat (közeli variánsai, vagy egyes részletei) közül szerepelni fog 3 darab a ZH-ban (A 8. adag 3. feladata, a 11. adag 4. feladata és a 12. adag 4. feladata nem lesz, ezeken kívül mindegyik házi feladat szóba jöhet).

Bevezetés az Algebrába 2 **2 darab minta-feladatlap a 2. ZH-hoz** **2026 máj. 6.**

2. Feladatlap

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Határozd meg A minimálpolinomját.
   (b) Legyen $p(x) = x^{2026} - x^{2024} + 2x$. Határozd meg a $p(A)$ mátrixot.

2. Igazold, hogy minden legalább elsőfokú $p \in \mathbb{C}[x]$ polinomhoz van olyan komplex-elemű mátrix, melynek épp p a minimálpolinomja.

3. Add meg az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix $\mathbb{C}$ feletti és $\mathbb{R}$ feletti Jordan-féle normálalakját.

4. Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonális mátrix. Igazold, hogy ha minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$-re $\langle Q\underline{x}, \underline{x} \rangle = ||\underline{x}||^2$, akkor $Q = I$.

5. Alakítsd a $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy + 2yz$ kvadratikus alakot négyzetösszeggé. Add meg az ortogonális diagonalizáló bázist, és határozd meg q jellegét (pozitív/negatív definit/szemidefinit, indefinit-e).

6. (a) Diagonalizáld Givens-forgatások szorzatával az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixot, vagy mutasd meg, hogy ez lehetetlen.
   (b) Add meg annak a Hauseholder-tükrözésnek a mátrixát mely az $\underline{a} = (1, 2, 2, 0)$ vektort a $\underline{b} = (0, 0, 0, 3)$ vektorra képezi.

Megjegyzések (pontosan ugyanazok, mint az előző oldalon).

1. A 2. ZH anyaga az, ami a 6-12 héten (2026 március 16-tól május 11-ig) előadáson és gyakorlaton elhangzott/elhangzik. A ZH-ban lehetnek olyan típusú feladatok, melyek ebben a mintaZH-ban nem szerepelnek.
2. A minta-ZH feladatai mind újak, hogy legyen muníció gyakorolni. A ZH-n 6 feladat lesz.
3. A 6.-12. adag házi feladat (közeli variánsai, vagy egyes részletei) közül szerepelni fog 3 darab a ZH-ban (A 8. adag 3. feladata, a 11. adag 4. feladata és a 12. adag 4. feladata nem lesz, ezeken kívül mindegyik házi feladat szóba jöhet).