

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

- Adj meg egy $f(x) = ax + b$ alakú függvényt, melyre az $[f(0), f(1), f(2)]$ vektor (a szokásos euklideszi normában) legközelebb van az $[1, 2, 2]$ vektorhoz.
- Igazold, hogy ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix idempotens, akkor nyoma és rangja egyenlő.
- Legyen V a folytonos valós függvények szokásos vektortere. Igaz-e, hogy $\sin \in \text{span}\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$?
- Add meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix spektrálfelbontását.

- Add meg a következő mátrix minimálpolinomját:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Igaz-e, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus, akkor sajátértékeinek algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik?
- Határozd meg a $Q(x, y, z) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ kvadratikus alak jellegét (pozitív/negatív definit/szemidefinit, indefinit)?
- Add meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix szinguláris értékek szerinti felbontását.
- Legyen a G gráf csúcsainak száma n . Igazold, hogy ha λ sajátértéke G szomszédsági mátrixának, akkor $|\lambda| \leq n - 1$.
- Röviden foglald össze a kétszemélyes mátrixjátékokat.

Megjegyzések. A 2. ZH utáni anyagrészből az alábbi feladattípusok lesznek (másfajta feladatot a 2. ZH utáni anyagrészből a vizsgán nem kérdezek).

- Mátrixfüggvények elemi tulajdonságai, konkrét mátrixfüggvények kiszámolása,
- Gráfok szomszédsági mátrixaira vonatkozó kérdések (elsősorban, de nem kizárólag sajátértékekkel kapcsolatos kérdések),
- Rövid, képletek nélküli (3-4 mondatos) összefoglaló ismertetés a lineáris algebra további alkalmazásairól. Csak a következőket fogom kérdezni: (a) Adattömörítés és lényegkiemelés, (b) Hibajavító kódok, (c) Mátrixfüggvények és hálózatok, (d) Mátrixfüggvények: robotkarok mozgása, (e) Lineáris Programozás, (f) Játékelmélet.