Bevezetés az Algebrába 2   1. Vizsgaalkalom írásbeli része és MINTA   2026 jun. 5.

1. MINTA A VIZSGÁK ÍRÁSBELI RÉSZÉHEZ MEGOLDÁSOKKAL[1]

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Van-e olyan nullmátrixtól és egységmátrixtól különböző $A \in \mathbb{C}^{2026\times 2026}$, hogy A és A^2 hasonlóak? B2;(Feb. 26)

   Persze hogy van, sőt még idempotens is van (bármelyik vetítés jó): $A^2 = A$ - ezek annyira hasonlóak, hogy konkrétan egyenlők (a megfelelő átkonjugáló mátrix az egységmátrix).

2. Add meg az összes optimális közelítő megoldását: $x = 1$. $x = 3$. A2;(Feb. 16)

   $A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $A\underline{x} = \underline{b}$. Normálegyenlethez: $A^TA = 2$, $A^T\underline{b} = 4$. Normálegyenlet: $2x = 4 \rightsquigarrow x = 2$. Így az optimális közelítő megoldás $x = 2$, ezt vártuk józan ésszel is...

3. Van-e olyan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, melynek 2 sajátértéke, és $A^3 = A$? D4;(Márc. 19)

   Legyen $p(x) = x^3 - x = x(x+1)(x-1)$. A feltételek alapján $p(A) = 0 \rightsquigarrow m_A|p$. Mivel a minimálpolinomnak minden sajátérték gyöke, ezért csak p gyökei: $0, 1-1$ lehetnek sajátértékek. Tehát nincs ilyen A mátrix.

4. Add meg az $A = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ Jordan-féle normálalakját. D11;(Ápr. 13)

   A felső háromszög $\rightsquigarrow k_A(x) = (2-\lambda)^2(5-\lambda) \rightsquigarrow A$ sajátértékei (algebrai multiplicitással): 2,2,5. Továbbá $A - 2\lambda I = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, ennek oszloptere (ami azonos $Im(A-2\lambda I)$-vel) 2 dimenziós (mert van 2 lin. független oszlopa), ezért a Dimenziótétel miatt $dim(ker(A-2\lambda I)) = 1 \rightsquigarrow dim(V_2) = 1$ azaz $\lambda = 2$-nek 1 a geometriai multiplicitása, ezért egyetlen Jordan-blokk tartozik hozzá. Az algebrai multiplicitás viszont $2 \rightsquigarrow \lambda = 2$-höz egyetlen (2×2)-es blokk tartozik. Tehát A Jordan-féle normálalkja: $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

5. Legyenek $\underline{a} = (1,1,0)$, $\underline{b} = (3,1,2)$ Határozd meg $span\{\underline{a},\underline{b}\}$ egy ortonormált bázisát. E3;(Ápr. 20)

   Gram-Schmidt-el: $\underline{v}_1 = (1,1,0)$, $\underline{v}_2 = \underline{b} - \frac{\langle b, v_1\rangle}{||\underline{v}_1||^2}\underline{v}_1 = (1,0,-1)$. Normálás után a keresett ortonormát bázis: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

6. Lehet-e $x^4 + 2x^2 + 2$ egy szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja? E8;(Ápr. 27)

   Nem lehet, mert szimmetrikus mátrix sajátéretékei valósak, de a megadott polinom: $x^4 + 2x^2 + 2 = (x^{+}1)^2 + 1 \rightsquigarrow$ minden gyöke komplex.

[1] A kérdések után X;(Y,Z) azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) lehetne tudni a választ.

7. A megfelelő kvadratikus alak diagonalizálásával alakítsd négyzetösszeggé: $3x^2 + 4xy + 3y^2$. Add meg a változók megfelelő lineáris helyettesítését is. E10;(Ápr. 30)

   A kvadratikus alak mátrixa: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ sajátértékek: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$. Ebből a négyzetösszeg $1(x')^2 + 5(y')^2$. A változók megfelelő helyettesítéséhez kell az A-t diagonalizáló ortogonális Q, melynek oszlopai A egységhosszú sajátvekotrai. Sajátvektorok λ_1-hez: $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, Sajátvektorok λ_2-höz: $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ezeket egységhosszúra normálva kapjuk Q oszlopait: $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tehát $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = Q^T A Q$ és $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow\ x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$.

8. Legyen A szinguláris értékek szerint felbontása: $A = U\Sigma V^T$. Igazold, hogy $(\forall \underline{x})||A\underline{x}|| = ||\underline{x}||$ akkor és csak akkor, ha A minden szinguláris értéke 1. E6;(Ápr. 23)

   $\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy A minden szinguláris értéke 1. Ekkor $\Sigma = I$ szintén ortogonális, ezért $A = U\Sigma V^T$ ortogonális, mert a jobboldal 3 ortogonális mátrix szorzata. Ezért A hossztartó.

   $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy $(\forall \underline{x})||A\underline{x}|| = ||\underline{x}||$, azaz A hossztartó $\rightsquigarrow$ A ortogonális $\rightsquigarrow$ $\Sigma = U^T A V$ ortogonális, mert a jobboldal 3 ortogonális mátrix szorzata. Tehát Σ ortogonális, ezért tetszőleges i-re $1 = ||\underline{e}_i|| = ||\Sigma \underline{e}_i|| = \sigma_i$.

9. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Adj meg egy r polinomot, melyre $e^A = r(A)$. G3;(Máj. 21)[2]

   A felső háromszögmátrix, $\lambda = 0$ háromszoros sajátértéke. Ezen az egyetlen sajátértéken kell eltalálni $f(x) = e^x$ helyettesítési értékét és első 2 dariváltját egy másodfokú r-el $\rightsquigarrow$ r választható f 0 körüli 2. Taylor-polinomjának: $r(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$.

10. Röviden írd le lineáris programozás alapfeladatát, és 2-3 mondatban emeld ki a kapcsolatát a lineáris algebrával. (Máj. 27)

    Az A mátrix i. sorának j. eleme azt adja meg, hogy az i. alkatrészből mennyit kell beépíteni a j. termékbe. A $\underline{b}$ vektor azt adja meg, hogy az egyes alkatrészekből mennyi áll rendelkezésre, a $\underline{c}$ vektor pedig azt, hogy az egyes termékeken mennyi a haszon. A kérdés az, hogy a raktárkészlet korlátait figyelembe véve miből mennyit gyártsunk, hogy a profit maximális legyen. Ehhez az $A\underline{x} \leq \underline{b}$ lineáris egyenlőtlenségrendszerrel megadott tartományon kell megkeresni a lineáris $f(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{x}$ függvény feltételes szélsőérték-helyeit.

[2] Ilyen jellegű feladatnál vizsgán pl. $e^x, sin(x), ...stb.$ hatványsorát belefogalmazom majd a feladat szövegébe, nem kell rá emlékezni.