

Első vizsgaalkalom írásbeli része és MINTA A VIZSGÁK ÍRÁSBELI RÉSZÉHEZ

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Van-e olyan nullmátrixtól és egységmátrixtól különböző $A \in \mathbb{C}^{2026 \times 2026}$, hogy A és A^2 hasonlóak?
2. Add meg az összes optimális közelítő megoldását: $x = 1$. $x = 3$.
3. Van-e olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, melynek 2 sajátértéke, és $A^3 = A$?
4. Add meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ Jordan-féle normálalakját.
5. Legyenek $\underline{a} = (1, 1, 0)$, $\underline{b} = (3, 1, 2)$ Határozd meg $\text{span}\{\underline{a}, \underline{b}\}$ egy ortonormált bázisát.
6. Lehet-e $x^4 + 2x^2 + 2$ egy szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja?
7. A megfelelő kvadratikus alak diagonalizálásával alakítsd négyzetösszeggé: $3x^2 + 4xy + 3y^2$. Add meg a változók megfelelő lineáris helyettesítését is.
8. Legyen A szinguláris értékek szerint felbontása: $A = U\Sigma V^T$. Igazold, hogy $(\forall \underline{x}) \|A\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$ akkor és csak akkor, ha A minden szinguláris értéke 1.
9. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Adj meg egy r polinomot, melyre $e^A = r(A)$.
10. Röviden írd le lineáris programozás alapfeladatát, és 2-3 mondatban emeld ki a kapcsolatát a lineáris algebrával.

Megjegyzések. A 2. ZH utáni anyagrészből az alábbi feladattípusok lesznek (másfajta feladatot a 2. ZH utáni anyagrészből a vizsgán nem kérdeznek).

1. Mátrixfüggvények elemi tulajdonságai, konkrét mátrixfüggvények kiszámolása,
2. Gráfok szomszédsági mátrixaira vonatkozó kérdések (elsősorban, de nem kizárólag sajátértékeikkel kapcsolatos kérdések),
3. Rövid, képletek nélküli (3-4 mondatos) összefoglaló ismertetés a lineáris algebra további alkalmazásairól. Csak a következőket fogom kérdezni: (a) Adattömörítés és lényegkiemelés, (b) Hibajavító kódok, (c) Mátrixfüggvények és hálózatok, (d) Mátrixfüggvények: robotkarok mozgatása, (e) Lineáris Programozás, (f) Játékelmélet.