

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Irreducibilis-e az $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3$ polinom
 - (a) \mathbb{R} felett? (0,2 pont)
 - (b) \mathbb{Q} felett? (0,3 pont)
 - (c) \mathbb{Z}_2 felett? (0,6 pont)
 - (d) Van-e racionális gyöke f -nek? (0,2 pont)
2. Irreducibilis-e $\mathbb{Z}[x]$ -ben illetve $\mathbb{Q}[x]$ -ben az $f(x) = 20x^5 + 30x^3 - 10x + 6$ polinom?
3. Igazold, hogy $\mathbb{Z}[x]$ -ben minden irreducibilis polinom prím is.
4. A kapitány és a hajója életkorának összege 84 év. A kapitány most kétszer olyan idős, mint amennyi a hajója volt akkor, amikor a kapitány annyi idős volt, mint a hajója most. Hány éves a kapitány?
(Útmutatás: írd fel egy lineáris egyenletrendszert a feladat szövege alapján, majd oldd meg. Segíthet, ha 3, vagy akár 4 ismeretlent használasz.)
5. Az alábbi lineáris egyenletrendszerben u és v valós paraméterek.
 - (a) Add meg az egyenletrendszer összes valós megoldását az $u = 1, v = 0$ paraméter-értékek mellett.
 - (b) Határozd meg, hogy az u és v értékeitől függően hány megoldás van \mathbb{R} -ben (válaszod fedje le az u és v valós számok összes lehetséges értékeit).

$$\begin{array}{rccccr} x_1 & + & x_2 & + & 4x_4 & = & 3 \\ x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & v \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & ux_4 & = & v \end{array}$$

6. Add meg paraméteresen és vektoriálisan is az $x + y - z = 0$ és $4x + 5y + 6z = 3$ síkok metszésvonalát.
7. Add meg az összes valós megoldást:

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_2 + x_3 = 1, \quad x_3 + x_4 = 1, \quad \dots, \quad x_{2024} + x_{2025} = 1, \quad x_{2025} + x_1 = 1.$$