Bevezetés az Algebrába 1 **Házi feladatok, 8. adag** **2025 okt. 27. - nov. 3.**

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Add meg a legkisebb fokú $f \in \mathbb{R}[x]$-et, melynek főegyütthatója 1, továbbá i háromszoros és 1 pedig kétszeres gyöke.
2. Legyenek $f = x^5 + 4x^3 + 3x$ és $x^5 + 6x^3 - 6x^2 + 9x - 9$ $\mathbb{Z}$ feletti polinomok.
   (a) Van-e közös gyöke f-nek és g-nek $\mathbb{C}$-ben?
   (b) Van-e többszörös gyöke f-nek $\mathbb{Z}_3$-ban?
3. Mutasd meg, hogy ha K egy test és $f \in K[x]$ irreducibilis $K[x]$-ben, akkor f-nek nem lehet többszörös gyöke semmilyen K-nál bővebb testben.
4. Bontsd irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$ felett: $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ (a felbontásban megjelenő komplex számokat nem muszáj algebrai alakban megadni, elég jelölést használni rájuk).
5. A racionális gyökök megkeresésével bontsd $\mathbb{Z}$ felett irreducibilis tényezők szorzatára:
   $$x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32.$$
6. $\mathbb{Z}$-beli együtthatóikat meghatározva add meg a Φ_5 és Φ_6 körosztási polinomokat.
7. Legyen p páratlan prím. Mutasd meg, hogy a Φ_{2p} és Φ_p körosztási polinomokra teljesül a
   $$\Phi_{2p}(x) = \Phi_p(-x)$$
   összefüggés.