Bevezetés az Algebrába 1 **Házi feladatok, 7. adag** **2025 okt. 20. - okt. 27.**

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Igazold, hogy ha az $f \in R[x_1, ..., x_n]$ szimmetrikus polinom főtagja $x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$, akkor f-nek legfeljebb $(k_1+1)^n$ darab tagja van.
2. Legyen $f(x,y) = y^4 + 2xy^2 + x^2 + 1$. Igazold, hogy nincs olyan $a, b \in \mathbb{R}$ valós számpár, melyre $f(a,b) = 0$. (Útmutatás: tekintsük f-et $R[y][x]$ elemének.)
3. Mennyi az $x^7 + x + 1$ polinom összes (komplex) gyökei négyzeteinek összege?
4. Legyenek az $f(x) = x^3 + 3x + 1$ polinom (komplex) gyökei a, b, c. Az a, b, c értékeinek meghatározása nélkül adj meg egy olyan $\mathbb{Z}$ feletti g polinomot, melynek gyökei $a+b,\ a+c,\ b+c$ (konkrétan add meg g együtthatóit).
5. Határozd meg az $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ és $g(x) = x^2 + 4x + 4$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és alkalmas h, k polinomokkal állítsd elő a legnagyobb közös osztót $hf + kg$ alakban.
6. Legyenek $f(x) = x^2(x+1)^3(x+4)$ és $g(x) = x^3(x-3)^2(x+4)^6$ $\mathbb{Q}$ feletti polinomok. Mik f és g irreducibilis tényezői $\mathbb{Q}[x]$-ben? Ezek alapján add meg f és g legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét $\mathbb{Q}[x]$-ben.
7. Igazold, hogy $x^3 + 2x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ irreducibilis.