Bevezetés az Algebrába 1 **Házi feladatok, 6. adag** **2025 okt. 13. - okt. 20.**

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Igazold, hogy tetszőleges $k, n, m \in \mathbb{N}$, $k \leq n+m$-re $\binom{n+m}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} \cdot \binom{m}{k-l}$.
   (Útmutatás: írd fel két módon is x^k együtthatóját $(x+1)$ egy alkalmasan választott hatványában.)
2. Legyen $\{\varepsilon_0, ..., \varepsilon_6\}$ a 7. egységgyökök halmaza. Igazold, hogy
$$\sum_{i<j<7} (\varepsilon_i \varepsilon_j) \ = \ 0.$$
3. Add meg az $f(x) = x^7 - 3x + 1$ polinom (összes komplex) gyökei reciprokainak összegét (azaz, ha a 7 gyök $z_1, z_2, ..., z_7$, akkor $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_7}$ értékét add meg).
4. A Cardano-képletek segítségével add meg a következő egyenlet összes komplex megoldását:
$$x^3 - 12x + 16 = 0.$$
5. Horner-módszer segítségével rendezd át a következő polinomot $(x-2)$ hatványai szerint:
$$x^3 - 6x^2 + 15x - 13.$$
6. Oszd el maradékosan az $x^5 - 4x^3 + 7x^2 + 14x$ polinomot $(x^3 - 2x^2 + 7)$-el.
7. Legyen n pozitív egész és legyenek $f(x_1, , , x_n), g(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ szimmetrikus polinomok. Igazold, hogy
   (a) $f + g$ is szimmetrikus polinom;
   (b) $f \cdot g$ is szimmetrikus polinom;