

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Legyen $w = \frac{(2 + 2\sqrt{3}i)^{15}}{(i - 1)^{10}}$. Add meg algebrai alakban a következő mennyiségeket: w , \bar{w} , $\sqrt[3]{w}$.
2. Add meg az összes komplex megoldást algebrai alakban: $z^2(1 - i)^{12} = \frac{-128 + 64i}{(1 + 2i)z}$
(a számolás egyes lépései előtt célszerű átgondolni, hogy az adott lépést algebrai, vagy trigonometrikus alakban érdemesebb-e elvégezni).
3. Legyen $z = \sqrt{3} + i$. Add meg algebrai alakban: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$.
4. Igazold, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ -re
$$\sin(5\alpha) = 5\sin(\alpha)\cos^4(\alpha) - 10\sin^3(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin^5(\alpha)$$
 és
$$\cos(5\alpha) = \cos^5(\alpha) - 10\sin^2(\alpha)\cos^3(\alpha) + 5\sin^4(\alpha)\cos(\alpha).$$
5. Igazold, hogy ha $z = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) \in \mathbb{C}$ -re az $\frac{\alpha}{2\pi}$ mennyiség irracionális, akkor az egységkör minden P pontjához és minden pozitív $d \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $|z^n - P| < d$ (azaz $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$ sűrű részhalmaza az egységkörnek).
6. Igazold, hogy ha H_1, H_2 olyan hasonló háromszögek a komplex számsíkon, melyek eltolások, forgatások, középpontos nagyítások/zsugorítások véges sorozataival egymásra képezhetők, akkor vannak olyan $a, b \in \mathbb{C}$ komplex számok, hogy az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$ lineáris függvény a H_1 háromszöget H_2 -re képezi.
7. Legyen az egységkörbe írt szabályos hétszög oldalának hossza e , rövidebb átlója hossza f és hosszabb átlója hossza g . Mutasd meg, hogy $1/e = 1/f + 1/g$.