Bevezetés az Algebrába 1 **Házi feladatok, 4. adag** **2025 szept. 29 - okt. 6.**

Minden választ indokoljunk, és - ahol ez szóbajön - adjuk meg az összes mellékszámítást is.

1. Elemei felsorolásával adj meg egy redukált maradékrendszert (mod 36). Röviden írd le, hogyan állítottad elő, és hogy a megadott elemek miért alkotnak redukált maradékrendszert.
2. Mennyi 30^{164} (mod 17)? Add meg a maradékosztály legkisebb, nemnegatív reprezentánsát!
3. Hány invertálható eleme van $\mathbb{Z}_{2025}$-nek? Indokolj.
4. Igazold, hogy tetszőleges p prímre és m pozitív egészre
$$\sum_{d|p^m} \varphi(d) = p^m.$$
(Megjegyzés: ez az állítás igaz marad, ha a bal és jobboldalon p^m-et egy tetszőleges pozitív n-re cseréljük (melynek sok különböző prímtényezője lehet)).
5. Igazold, hogy tetszőleges pozitív egész n, m számokra teljesül, hogy ha $n|m$, akkor $\varphi(n)|\varphi(m)$.
6. Igazold, hogy tetszőleges páratlan pozitív egész n-re $2^{n!} \equiv 1$ (mod n).
7. **Egész számok konstrukciója a természetes számokból.**
((a) és (b) együtt 1 pont, (c) további 1 pont).
Legyen $P = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a természetes számokból képezhető rendezett párok halmaza, és legyen
$$R = \{\langle(a_1, b_1),\ (a_2, b_2)\rangle \in P^2 : a_1 + b_2 = a_2 + b_1\}.$$
   (a) Igazold, hogy R egy ekvivalenciareláció.
   (b) Definiáljuk P/R-en (azaz R ekvivalenciaosztályain) a $+^R$ összeadást így:
$$(a_1, b_1)/R\ +^R\ (a_2, b_2)/R \stackrel{Def.}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2)/R.$$
   Mutasd meg, hogy $+^R$ jóldefiniált.
   (c) Mutasd meg, hogy az
$$f : P/R \to \mathbb{Z},\ f((a, b)/R) \stackrel{Def.}{=} a - b$$
   függvény jóldefiniált és izomorfizmus a $\langle P/R, +^R\rangle$ és $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$ struktúrák között.