

Minden választ indokoljunk, és - ahol ez szóbajön - adjuk meg az összes mellékszámítást is.

1. Legyen R kommutatív, nullosztómentes egységelemes gyűrű, és legyen

$$P = \{\langle a, b \rangle \in R^2 : \text{vannak olyan } e, f \in R \text{ egységek, melyekre } a = f \cdot b, b = e \cdot a\}.$$

Igazold, hogy P egy ekvivalenciareláció.

2. Igazold, hogy tetszőleges x, y, z pozitív egész számokra teljesül: ha $x|z, y|z, (x, y) = 1$, akkor $xy \leq z$.
3. Legyen n a születésed napja (év, hónap nélkül, ha pl. 2007 május 25.-én születted, akkor $n = 25$). Hány nullára végződik $(2025 - n)!$ 6-os számrendszerben felírt alakja?

4. (a) Invertálható-e 6 a \mathbb{Z}_{15} gyűrűben?
(b) Adjuk meg az összes olyan $n \geq 6$ egész számot, melyekre teljesül, hogy 6 invertálható \mathbb{Z}_n -ben.

5. Legyen n a születésed napja (év, hónap nélkül, ha pl. 2007 május 25.-én születted, akkor $n = 25$). Add meg a

$$12x \equiv 42 \pmod{n}$$

kongruencia összes megoldását (ha nincs megoldás, akkor indokold, hogy miért nincs).

6. Add meg a következő lineáris kongruencia-rendszer összes megoldását:

$$x \equiv 2 \pmod{5}, \quad x \equiv 4 \pmod{12}, \quad x \equiv 6 \pmod{49}.$$

7. Igazold, hogy minden pozitív egész n számnak van olyan pozitív egész többszöröse, melynek 10-es számrendszerben felírt alakjában 0-n és 1-en kívül más számjegy nem fordul elő.
(Útmutatás: alkalmazzuk a skatulya-elvet a $10^0, 10^1, 10^2, \dots, 10^{n(n-1)}$ számokra).