

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Határozd meg az  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -2 & 8 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix oszlopterének egy bázisát.

2. Mutasd meg, hogy felső-háromszög mátrixok szorzata felső-háromszög mátrix marad.

3. Adj meg egy olyan harmadfokú  $f \in \mathbb{R}$  polinomot, melyre  $f(-1) = 2$ ,  $f(0) = 4$ ,  $f(1) = 10$ ,  $f(2) = 26$ .

4. Igazold, hogy minden nemnulla  $f \in \mathbb{Z}[x]$ -hez van olyan  $g \in \mathbb{Z}[x]$ , hogy az  $fg$  polinomban minden tag kitevője 2-hatvány (azaz valamilyen  $k \in \mathbb{N}$ -re  $2^k$ -alakú).

(Útmutatás: adj meg egy lineáris egyenletrendszert  $g$  egyelőre ismeretlen együtthatóira, melynek megoldásai mindig megfelelő  $g$ -t adnának, majd indokold meg, hogy az egyenletrendszered mindig megoldható, ha  $g$  fokát elegendően nagyra választjuk).

5. Legyenek az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$  térvektorok koordinátái a sztenderd bázisban

$$\underline{a} = [1, 1, 0], \quad \underline{b} = [1, 0, 1], \quad \underline{c} = [0, 1, 1].$$

(a) Add meg az  $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ -ről a sztenderd bázisra való áttérés mátrixát.

(b) Add meg az  $xy$ -síkra való merőleges vetítés mátrixát az  $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$  bázisban.

6. Legyen  $K$  tetszőleges test,  $n \in \mathbb{N}^+$  és  $\varphi : K^n \rightarrow K^n$  lineáris leképezés. Tetszőleges  $B \subseteq K^n$  bázisra legyen  $A_B$  a  $\varphi$  leképezés mátrixa  $B$ -ben. Igazold, hogy  $\det(A_B)$  minden  $B$ -re ugyanannyi (azaz a leképezés mátrixának determinánusa báziscserénél nem változik).

7. Legyen  $K$  test,  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $A \in K^{n \times n}$  és legyen  $\varphi : K^n \rightarrow K^n$ ,  $\varphi(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ . Igazold, hogy ha az  $A$  mátrix nulltere legalább  $k$ -dimenziós, akkor van olyan bázis, amiben  $\varphi$  mátrixának legalább  $k$  darab csupanulla oszlopa van.