Bevezetés az Algebrába 1 **Házi feladatok, 11. adag** **2025 nov. 17. - nov. 24.**

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Legyen a és b a születésed hónapja és napja (év nélkül, ha pl. 2007 május 25.-én születtél, akkor $a = 5,\ b = 25$). Legyen
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$
Számold ki A^2-et és $det(A)$-t.

2. Legyenek $f(x) = x^2 - 3x + 5,\ g = x^2 + 1,\ h = x^2 + \alpha \cdot x + 1,\ k = x + (3 - \alpha) \in \mathbb{R}[x]$ (h-ban és k-ban α valós paraméter).
   (a) Az $\alpha = 1$ esetben állítsd elő f-et a g, h, k polinomok lineáris kombinációjaként, vagy mutasd meg, hogy ez lehetetlen.
   (b) Az α paraméter mely értékei mellett lesz $\{g, h, k\}$ bázis a legfeljebb másodfokú, valós együtthatós polinomok vektorterében?

3. Legyen V a legfeljebb 3-adfokú valós együtthatós polinomok vektortere, és legyen $\varphi : V \to V$,
$$\varphi(f) = f'$$
(itt f' az f deriváltja). Add meg φ mátrixát a szokásos $(x^3, x^2,\ x,\ 1)$ bázisban.

4. Legyenek a sík két különböző pontjának, P-nek és Q-nak a koordinátái (a sztenderd bázisban) $P = [p_0, p_1],\ Q = [q_0, q_1]$. Igazold, hogy a P-n és Q-n átmenő egyenes egyenlete
$$det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ p_0 & p_1 & 1 \\ q_0 & q_1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

5. Legyen n pozitív egész és legyen $R = \{a + ib :\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Igazold, hogy ha az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix minden eleme R-ben van, akkor $det(A) \in R$ is teljesül (azaz, ha a mátrix minden eleme "$a + ib,\ a, b$ egész szám" alakú, akkor determinánsa is ilyen alakú).

6. Legyen K test, legyenek $P, Q, R \in K^{2\times 2}$ tetszőleges mátrixok, és legyen $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a 2×2-es nullmátrix. Soraik és oszlopaik értelemszerű egymásután írásával képezzük ezekből a
$$T = \begin{pmatrix} P & Q \\ O & R \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}$$
mátrixot; szokás szerint T_{ij} jelöli T i. sorának j. elemét.
   (a) Hány olyan $\pi \in Sym([4])$ permutáció van, melyre $T_{1\pi(1)}T_{2\pi(2)}T_{3\pi(3)}T_{4\pi(4)} \neq 0$?
   (b) Az (a) rész felhasználásával mutasd meg, hogy $det(T) = det(P) \cdot det(R)$.

7. Igazold, hogy tetszőleges pozitív egész n-re az $[n]$ halmaz tetszőleges permutációja előáll transzpozíciók kompozíciójával (egymás után fűzésével).