Bevezetés az Algebrába 1 **Házi feladatok, 10. adag** **2025 nov. 10. - nov. 17.**

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Legyen K egy test, $n \in \mathbb{N}$, és legyenek $U, V \subseteq K^n$ alterei K^n-nek. Tegyük fel, hogy $\{b_1, ..., b_r\}$ bázis $U \cap V$-ben, $\{b_1, ..., b_r, u_1, ..., u_k\}$ bázis U-ban és $\{b_1, ..., b_r, v_1, ..., v_m\}$ bázis V-ben. Igazold, hogy ekkor
$$\{b_1, ..., b_r, u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_m\}$$
bázis $U + V$-ben. Ennek segítségével igazold, hogy $dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$.

2. Hány altere van a $\mathbb{Z}_2$ feletti $(\mathbb{Z}_2)^3$ vektortérnek?

3. Az S halmaz elemei az összes $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ (tehát $S \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$). Alkalmas műveletartó függvény megadásával mutasd meg, hogy S a szokásos mátrixműveletekkel gyűrűt alkot, és ez a gyűrű izomorf a komplex számok gyűrűjével.

4. Gauss-Jordan eliminációval határozd meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét.

5. Legyenek $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}$. Állítsd elő C-t az A és B lineáris kombinációjaként ($\mathbb{R}$ felett), vagy mutasd meg, hogy ez lehetetlen.

6. Legyenek $n, k, m \in \mathbb{N}$, K test, $A \in K^{n\times k}$, $B \in K^{k\times m}$ továbbá $j \leq k$-ra legyen $a_j \in K^{n\times 1}$ az A mátrix j. oszlopa és $b_j \in K^{1\times m}$ a B mátrix j. sora, végül legyen $D_j = a_j b_j \in K^{n\times m}$. Igazold, hogy
$$AB = \sum_{j=1}^{k} D_j$$
(a jobboldalon k darab $n \times m$-es mátrix összege van).

7. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Igazold, hogy ha A, B $n \times n$-es négyzetes mátrixok, akkor az $AB - BA$ mátrix főátlójában álló elemek összege 0.
(0,5 pontért elég $n = 3$-ra megmutatni ezt).