Áttörés az Erdős–Szekeres problémában

Tardos Gábor[*] *Tóth Géza*[†]

1 Konvex sokszögek

Egy véges síkbeli P ponthalmazt *konvex helyzetűnek* nevezünk, ha mindegyik pontja elválasztható a többitől egy egyenessel, azaz bármelyik $p \in P$ ponthoz található olyan egyenes, melynek p az egyik, míg P többi pontja a másik oldalán van. Eszerint egy legfeljebb két pontú ponthalmaz mindig konvex helyzetben van, a legalább három pontú ponthalmazok közül éppen a konvex sokszögek csúcshalmazai vannak konvex helyzetben. Így egy egyenes pontjai között sosem találunk hármat konvex helyzetben. Hogy ezt a problémát elkerüljük, a továbbiakban csak *általános helyzetű* ponthalmazokkal foglalkozunk, azaz feltesszük, hogy a pontok közt nincs három egy egyenesen.

(a) *(b)*

1. ábra. Öt pont (a) konvex, (b) nem konvex helyzetben.

Klein Eszter, az akkor 22 éves egyetemista 1932-ben vette észre, hogy öt általános helyzetű pont között a síkon mindig van négy ami konvex helyzetben van. A bizonyítás nagyon egyszerű. Ha a pontok konvex burka (a legnagyobb sokszög, amit meghatároznak) ötszög vagy négyszög, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha a konvex burok egy abc háromszög, akkor további két pont, d és e, ennek

[*]Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, 1053 Budapest, Reáltanoda utca 13–15; `tardos@renyi.hu`. A szerzőt az MTA Kriptográfia "Lendület" programja valamint a Nemzeti Kutatási és Innovációs Hivatal K-116769-es és SSN-117879-es számú programjai támogatják.

[†]Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, 1053 Budapest, Reáltanoda utca 13–15; `geza@renyi.hu`. A szerzőt a Nemzeti Kutatási és Innovációs Hivatal K-111827-es számú programja támogatja.

a belsejében van. A *de* egyenes az *abc* háromszög két oldalát metszi, mondjuk *ab*-t és *ac*-t. Ekkor viszont b, c, d és e konvex helyzetben van. (lásd. 1. ábra) Klein Eszter megkérdezte, hogy ez az egyszerű észrevétele általánosítható-e: vajon elég sok általános helyzetű pont között már feltétlenül találunk-e ötöt (hatot, stb.) konvex helyzetben? Tehát Klein Eszter kérdése a következő.

Igaz-e, hogy minden $n \geq 3$ természetes számhoz létezik egy N szám azzal a tulajdonsággal, hogy N általános helyzetű pont között a síkon mindig van n amelyek konvex helyzetben vannak.

Érdekes meghatározni a legkisebb megfelelő N számot, legyen tehát $f(n)$ az a legkisebb N egész szám, hogy N általános helyzetű pont közül a síkon mindig van n konvex helyzetben. Ebben a megfogalmazásban Klein Eszter kérdése az, hogy létezik-e egyáltalán $f(n)$ minden n-re.

Világos, hogy $f(3) = 3$ és a előbbi észrevétel alapján $f(4) \leq 5$. De egy háromszög három csúcsa és egy belső pontja mutatja, hogy négy általános helyzetű pont nem mindig van konvex helyzetben, tehát $f(4) = 5$. Makai Endre és Turán Pál néhány héten belül belátták, hogy $f(5) = 9$ [2], majd Szekeres György még abban az évben bebizonyította, hogy $f(n)$ létezik minden n-re. Természetesen adódott a következő kérdés:

Erdős-Szekeres probléma. *Határozzuk meg $f(n)$ értékét.*

Nem sokkal később Erdős alaposan megjavította Szekeres korlátját majd közösen publikálták az eredményt [2], amely szerint minden $n \geq 3$-ra

$$f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

Sőt, $f(3)$, $f(4)$ és $f(5)$ értékei alapján a következő merész sejtést is megfogalmazták:

Sejtés. *Minden $n \geq 3$-ra*

$$f(n) = 2^{n-2} + 1.$$

Ez az egyszerű probléma, eredmény, illetve sejtés korszakalkotó jelentőségűnek bizonyult, egyfelől azért, mert hozzájárult F. P. Ramsey öt évvel korábban megjelent eredményeinek [13] újrafelfedezéséhez és ezzel a Ramsey elmélet megalapozásához, másfelől azért is, mert megnyitotta az utat ponthalmazok kombinatorikájának tanulmányozásához, ami mára szép és gazdag területe lett a matematikának.

Klein Eszter és Szekeres György nem sokkal később összeházasodtak, ezért a problémát Erdős "Happy End Problem"-nek nevezte.

A legjobb ismert alsó korlát $f(n)$-re éppen a sejtett értéke, $f(n) \geq 2^{n-2} + 1$, az ezt bizonyító konstrukciót Erdős és Szekeres találták 25 évvel később [3]. A konstrukció 2^{n-2} pontból áll és semelyik n pontja sincs konvex helyzetben. Nagyon szimmetrikus és "merev", ha bármelyik pontját lényegesen elmozdítjuk, keletkezik n pont konvex helyzetben. Ezért a konstrukció alapján könnyen gondolhatja az ember, hogy nem javítható, vagyis a sejtés igaz.

Erdős és Szekeres felső korlátja, $\binom{2n-4}{n-2} \approx 4^n/\sqrt{n}$, tehát majdnem a négyzete az alsó korlátnak. A problémával nagyon sokan foglalkoztak, szépsége és fontossága miatt, ennek ellenére a felső korlátot először 60 évvel később sikerült megjavítani. 1998-ban Fan Chung és Ron Graham [1] egy unalmas repülőúton azt vizsgálta, hogy ha az igazság pontosan a felső korlát lenne, tehát $f(n) = \binom{2n-4}{n-2} + 1$, akkor hogyan nézne ki egy $\binom{2n-4}{n-2}$ elemű ponthalmaz, amiben még nincs konvex n-szög. Belátták, egy nagyon ügyes érveléssel, hogy ilyen ponthalmaz nem létezhet, és ezzel a felső korlátot a lehető legkisebb mértékben, 1-gyel megjavították. Ezen felbuzdulva Kleitman és Pachter [6] nagyjából egy hónappal később belátták, hogy $f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 7 - 2n$, tehát a javítás mértéke már tart a végtelenbe. Majd újabb egy hónap múlva Tóth és Valtr [16] belátták, hogy $f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 2$, ami már nagyjából a fele az eredeti korátnak. Ez a három javítás időben olyan közel volt egymáshoz, hogy a Discrete and Computational Geometry című újságnak ugyanabban a számában jelentek meg. Itt leállt a javítások sorozata egy időre, és továbbra is óriasi volt az eltérés a felső és az alsó korát között. 2005-ben Tóth és Valtr [17] kombinálták a saját módszerüket Chung és Graham módszerével, így újra megjavították eggyel a felső korlátot.

2015-ben aztán újra megindult a lavina, Georgios Vlachos, egy MSc diák az MIT-ről, tovább javította a felső korlátot egy $\frac{29}{32}$ [15] faktorral. Hossein Mojarraddal közösen alaposan leegyszerűsítették és tökéletesítették a bizonyítást, végül a $\frac{29}{32}$ faktor helyett egy $\frac{7}{8}$ faktorral javítottak [7]. Közben Norin és Yuditsky [9] is elérték lényegében ugyanezt a korlátot, de még egyszerűbb bizonyítással.

Ezután jött az igazi áttörés, 2016-ban Andrew Suk elképesztő javítással állt elő [14]. Több korábbi módszert, ötletet ügyesen kombinálva sikerült a felső korlátot levinnie az alsó korlát közelébe. Belátta, hogy $f(n) \leq 2^{n+6n^{2/3}\log n}$, ezzel kis híján megoldotta Klein, Erdős és Szekeres problémáját. Az elegáns bizonyítást Andreas Holmsen, Hossein Mojarrad, Pach János és Tardos Gábor tovább egyszerűsítette, és a korlátot is sikerült egy kicsit megjavítaniuk [5]. A pillanatnyilag ismert legjobb felső korlát $f(n)$-re az övék:

$$f(n) \leq 2^{n+6\sqrt{n\log n}}.$$

Könnyebb áttekinteni a különböző korlátokat, ha nem a fenti $f(n)$ függvényt, hanem az ekvivalens inverz problemát, és az alábbi $g(N)$ függvényt vizsgáljuk. Legyen $g(N)$ az a legnagyobb n egész szám, melyre N általános helyzetű pont között a síkon mindig található n konvex helyzetben. Az Erdős-Szekeres sejtés ekvivalans azzal, hogy

$$g(N) = \lceil \log N \rceil + 1$$

minden pozitív N egészre. Itt, és a továbbiakban log a kettes alapú logaritmust jelöli. Az $f(n)$-re adott alsó és felső korlátok szerepe megfordul. Erdős és Szekeres 1935-ös felső korlátjából [2] alsó korlát lesz $g(N)$-re, míg az 1961-es alsó korlátjukból [3] $g(N)$-re felső korlát adódik:

$$\frac{\log N}{2} + h(N) \leq g(N) \leq \lceil \log N \rceil + 1.$$

Itt $h(N)$ egy aszimptotikusan $(\log\log N)/2$ közeli függvény, ami az alsó becslés nagyságrendjét nem befolyásolja. Az $f(n)$-re adott alsó és felső becslés közötti majdnem négyzetes eltérésből a

$g(N)$ esetében egy majdnem kettes faktor eltérés marad. Chung és Graham [1] 1-gyel javította az $f(n)$-re adott felső becslést, ebből a $g(N)$-re adott aló becslés javítása következik 1-gyel, de csak bizonyos (ritka) N értékekre. A további javítások [6, 16, 17, 15, 7, 9] ugyancsak eggyel javították csak Erdős és Szekeres alsó becslését a $g(N)$ függvényre, de egyre több és több N érték esetén. Suk átütő eredménye [14] azonban aszimptotikusan bezárta az alsó és felső becslés közötti kettes faktor eltérést:

$$g(N) \geq \log N - 6\log^{2/3} N \log\log N.$$

A hibatag nagyságrendjét [5] tovább csökkenti $\sqrt{\log N \log\log N}$-re.

Az eddig tárgyalt becslések nem segítettek abban, hogy az $f(n)$ értéket minél több (kicsi) n értékre meghatározzuk. Említettük, hogy Klein Eszter 1932-ben belátta, hogy $f(4) = 5$, valamint hogy Makai és Turán ugyanakkor belátták, hogy $f(5) = 9$. Szekeres György bő hetven év elteltével visszatért a problémához és Lindsay Petersszel közös publikációban [12] belátták, hogy $f(6) = 17$. Ez az eredmény komolyabb komputeres esetvizsgálaton alapul és már Szekeres halála után jelent meg. Az $f(n)$ érték semmilyen $n > 6$ számra nem ismert.

Ebben a cikkben áttekintjük az alsó korlát konstrukciót, a felső korlát javításait, a felhasznált módszereket, és vázoljuk a legjobb ismert korlát bizonyítását.

Az Erdős-Szekeres problémának számos általánosítását, módosítását vizsgálták, sok izgalmas és szép eredménnyel. Ezekről ad kiváló összefoglalót magyarul Pach János [10], angolul Morris és Soltan [8]. Suk eredményéről nagyon szórakoztató ismeretterjesztő cikket írt Hartnett [4].

2 Hegyek és völgyek

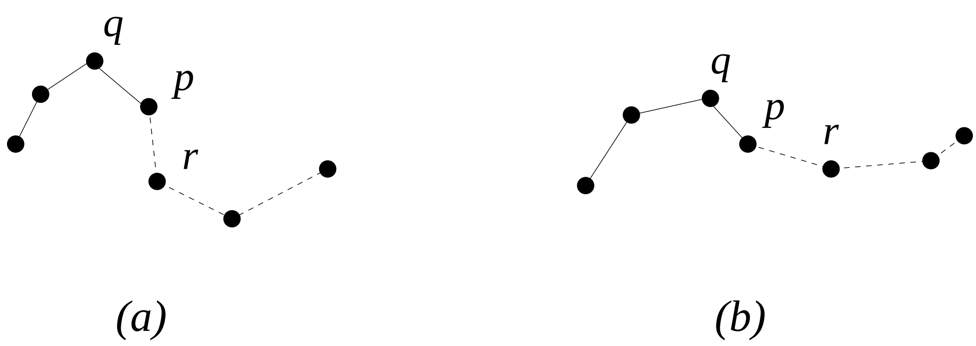
Szekeres legelső bizonyítása [2] $f(n)$ létezésére a Ramsey tételt használta, amit újra bebizonyított, mert nem ismerte Ramsey publikációját. Erdős javítása, [2] és az összes további javítás legfontosabb segédeszközei a hegyek és völgyek.

Definíció. Rögzítsünk egy xy koordinátarendszert a síkon. Ezentúl egy ponthalmazra akkor mondjuk, hogy *általános helyzetű*, ha nincs három pontja egy egyenesen és nem egyezik meg két pontjának az x-koordinátája. Legyen $k \geq 2$ és legyenek p_1, $p_2, \ldots$, p_k általános helyzetű pontok, balról jobbra, vagyis növekvő x-koordináta szerint rendezve. A $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pontok egy k-hegyet (k-völgyet) alkotnak, ha konvex helyzetben vannak és $p_2, \ldots$, p_{k-1} a $p_1 p_k$ egyenes fölött (alatt) van (2. ábra).

A k-völgyek illetve k-hegyek $k \geq 3$ esetén speciális konvex k-szögek. Vegyük észre, hogy három általános helyzetű pont vagy 3-hegyet, vagy 3-völgyet alkot. Erdős és Szekeres bizonyításának alapja a következő észrevétel.

Ha egy k-hegy utolsó pontja és egy l-völgy első pontja megegyezik, akkor valamelyiket egy ponttal meg lehet hosszabbítani (2. ábra).

Valóban, legyen p a k-hegy utolsó pontja és az l-völgy első pontja, legyen q a k-hegy utolsó előtti pontja és legyen r az l-völgy második pontja. Ekkor qpr vagy hegyet, vagy völgyet alkot.



2. ábra. (a) A 4-hegy kiegészíthető r-rel, (b) a 4-völgy kiegészíthető q-val.

Az első esetben r-rel kiegészíthetjük a hegyet egy $k+1$-heggyé, a második esetben pedig a völgyet egészíthetjük ki q-val egy $l+1$-völggyé.

Minden $k, l \geq 2$-re legyen $f(k,l)$ az a legkisebb f szám, amelyre igaz, hogy f általános helyzetű pont között a síkon mindig van egy k-hegy vagy egy l-völgy. Nyilván $f(n) \leq f(n,n)$, ezért az alábbi tételből azonnal következik Erdős és Szekeres korlátja $f(n)$-re. (Kicsit zavaró, hogy az "általános helyzet" fogalmát szigorítottuk, így elsőre csak az ilyen szigorúbb értelemben vett általános helyzetű $f(n,n)$ méretű síkbeli ponthalmazra adódik, hogy kiválasztható közüle n konvex helyzetű pont. Ez a probléma kezelhető azzal, hogy az xy koordinátarendszert úgy választjuk, hogy ne legyen két pontnak azonos az x koordinátája.) Meglepő módon, $f(n)$-nel ellentétben, $f(k,l)$ értéket pontosan tudjuk.

1. Tétel. [2]

$$f(k,l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy minden $k, l \geq 3$-ra

$$f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$$

Tekintsünk egy $f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$ elemű általános helyzetű P ponthalmazt. Belátjuk, hogy mindenképpen tartalmaz k-hegyet vagy l-völgyet. Legyen Q a P-ben található $(k-1)$-hegyek utolsó pontjainak a halmaza. Ha $|Q| \geq f(k,l-1)$, akkor Q vagy tartalmaz egy k-hegyet, és készen vagyunk, vagy egy $(l-1)$-völgyet. De ekkor ennek az $(l-1)$-völgynek az első pontja egyben egy $(k-1)$-hegy utolsó pontja is, tehát vagy a hegy, vagy a völgy meghosszabbítható és megint készen vagyunk. Vagyis feltehetjük, hogy $|Q| \leq f(k,l-1) - 1$, ekkor viszont $|P \setminus Q| \geq f(k-1,l)$, tehát $P \setminus Q$ tartalmaz egy l-völgyet és ismét készen vagyunk, vagy egy $k-1$-hegyet, ami ellentmondás, mert ennek az utolsó pontja Q-hoz tartozna.

Legyen $g(k,l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$g(k,l) = g(k-1,l) + g(k,l-1) - 1.$$

Ezenkívül ha $k = 2$ vagy $l = 2$, akkor $f(k,l) = g(k,l)$. Ezekből pedig indukcióval adódik, hogy minden $k, l \geq 2$-re $f(k,l) \leq g(k,l)$.

Az alsó korláthoz minden $k, l \geq 2$-re konstruálunk egy $P(k,l)$ ponthalmazt, amely éppen $\binom{k+l-4}{k-2}$ pontból áll és nem tartalmaz k-hegyet és l-völgyet. A $k = 2$ illetve $l = 2$ esetben egy egy pontból álló halmaz jó lesz. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a $P(k-1,l)$ és a $P(k,l-1)$ ponthalmazokat. Helyezzük el őket egymás mellé úgy, hogy $P(k-1,l)$ az y-tengelytől balra, $P(k,l-1)$ pedig jobbra legyen, $P(k-1,l)$ minden pontja a $P(k,l-1)$ pontjai által meghatározott egyenesek fölött legyen, és $P(k,l-1)$ minden pontja a $P(k-1,l)$ pontjai által meghatározott egyenesek alatt legyen. Az utóbbi két feltétel biztosítható azzal, ha a $P(k-1,l)$ ponthalmazt az y-tengellyel párhuzamosan megfelelő magasra toljuk. Ekkor minden $P(k-1,l)$-beli hegy maximum egy $P(k,l-1)$-beli ponttal egészíthető ki, és fordítva, minden $P(k,l-1)$-beli völgy maximum egy $P(k-1,l)$-beli ponttal egészíthető ki. Ebből adódik, hogy az így kapott $\binom{k+l-5}{k-2} + \binom{k+l-5}{k-3} = \binom{k+l-4}{k-2}$ elemű $P(k,l)$ halmaz nem tartalmaz sem k-hegyet, sem l-völgyet. $\square$

Vegyük észre, hogy ha n pont konvex helyzetben van, akkor felbontható két részhalmaz uniójára, amiből az egyik hegy, a másik völgy. A hegy a konvex n-szög "teteje", a völgy az "alja" lesz. Ha feltesszük, hogy a pontok x-koordinátája páronként különböző, akkor a hegynek és a völgynek két közös pontja is lesz: a legkisebb és legnagyobb x-koordinátájú csúcsa a konvex n-szögnek. Láttuk, hogy $f(n,n)$ általános helyzetű pont közül mindig kiválaszthatunk n-et konvex helyzetben: egy n-hegyet, vagy egy n völgyet. Találhatunk viszont $f(n,n) - 1$ pontot általános helyzetben, hogy nincs köztük sem n-hegy, sem n-völgy. Egy ilyen ponthalmaz nem tartalmaz $2n-3$ pontot konvex pozicióban, hiszen az ellentmondana a fentebbi felbontásnak hegyre és völgyre.

Ez a gondolatmenet jól mutatja, hogy $g(N)$ értékere (ez a legnagyobb n szám, hogy N általános helyzetű pontból mindig kiválasztható n konvex helyzetben) Erdős és Szekeres által adott alsó és felső becslések között miért körülbelül egy kettes faktor differencia van: Pontosan tudjuk, hogy mekkora hegy vagy völgy választható ki N általános helyzetű pont közül, de azt már nehezebb meghatározni, hogy ezek mikor "illeszthetőek össze" egy konvex ponthalmazzá.

A fenti gondolatmenetet direktben is használhatjuk arra, hogy $f(n)$-re alső becslést adjunk. Ha $k + l = n + 3$, akkor $f(n) \geq f(k,l)$, hiszen n konvex helyzetű pont között van k-hegy vagy l-völgy. A korábban megkonstruált $P(k,l)$ ponthalmazok ügyes kombinálásával kissé erősebb alsó becslést kapunk, ami egyben megegyezik $f(n)$ sejtett értékével is:

2. Tétel. [3]
$$f(n) \geq 2^{n-2} + 1.$$

Bizonyítás. Legyen $n \geq 4$. Minden i-re $(2 \leq i \leq n)$ helyezzük el $P(i, n+2-i)$ egy nagyon pici és nagyon lapos példányát az (i, i^2) pont közelébe úgy, hogy a pontjai által meghatározott egyenesek mind majdnem vizszintesek. Nevezzük ezeket *blokkoknak*. Mindez azért lehetséges, mert a $P(i,j)$ ponthalmazt szabadon eltolhatjuk, kicsinyíthetjük, sőt "lapíthatjuk" is (alkalmazhatunk affin transzformációt az y-tengely irányában), mindez nem befolyásolja hogy mekkora hegyek és völgyek vannak a ponthalmazban. Legyen P_n a kapott halmaz. Világos, hogy

$$|P_n| = \sum_{i=2}^{n} |P(i, n+2-i)| = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = 2^{n-2}.$$

Azt állítjuk, hogy P_n nem tartalmaz konvex n-szöget. Legyen Q egy konvex ponthalmaz P_n-ben. Legyen $P(k, n+2-k)$ a legalsó blokk, amiben Q-nak van pontja, és $P(l, n+2-l)$ a legfelső. Ha $k = l$, akkor Q a $P(k, n+2-k)$ blokk része, így a tétel kimondása előtti gondolatmenet alapjan $|Q| \leq n-1$. Ha viszont $k < l$, akkor Q $P(k, n+2-k)$-ből egy völgyet tartalmaz, amelynek a mérete legfeljebb $n+1-k$, $P(l, n+2-l)$-ből egy hegyet, aminek a mérete legfeljebb $l-1$, és a köztük levő $k-l-1$ blokk mindegyikéből legfeljebb egy pontot. Ezért $|Q| \leq n+1-k+l-1+k-l-1 = n-1$. $\square$

3 Javítások

Mint említettük, az első javítást Chung és Graham érte el 1998-ban, [1]. Azt látták be, hogy $f(n) \leq f(n,n) - 1 = \binom{2n-4}{n-2}$. Tekintsünk egy $f(n,n) - 1$ méretű ponthalmazt. Ha tartalmaz egy n-hegyet vagy n-völgyet, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor viszont Chung és Graham megmutatják, hogy található egy $n-1$-hegy és "alatta" egy pont, vagy egy $n-1$-völgy és "fölötte" egy pont, ami egy konvex n-szöget alkot.

A következő javítás Kleitman és Pachter eredménye, [6]. Észrevették, hogy az Erdős-Szekeres-féle hegyes-völgyes bizonyítás tetszőleges xy koordinátarendszerben elmondható. Úgy forgatták el a koordinátarendszert, hogy a konvex burok egyik éle függőleges legyen, és ezt a szakaszt "duplán" használták. Kiterjesztették a hegy és a völgy definícióját úgy, hogy ez a függőleges él lehet egy hegynek és egy völgynek is az utolsó éle. Ezzel egy kicsit jobb rekurziót kaptak, és azt, hogy $f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} - 2n + 7$.

Ezután következett Tóth és Valtr javítása, [16]. A módszerük lényege az, hogy a forgatásnál sokkal általánosabb transzformációt alkalmaznak a hegy-völgy érvelés előtt, mégpedig egy alkalmas projektív transzformációt. Tóth és Valtr azt látták be, hogy $f(n) \leq f(n-1, n) + 1$. Legyen P egy $f(n-1, n) + 1$ elemű ponthalmaz és p a konvex burok egy csúcsa. Legyen $Q = P \setminus \{p\}$. Legyen ℓ egy p-t tartalmazó egyenes, amelynek Q minden pontja ugyanazon az oldalán van. Alkalmazzunk egy projektív transzformációt, amely ℓ-et a végtelen távoli egyenesbe viszi, p-t az $y = -\infty$ végtelen távoli pontba, Q-t pedig az R halmazba. Mivel $|R| = f(n-1, n)$, R tartalmaz egy $n-1$-hegyet vagy egy n-völgyet. Ha n-völgyet tartalmaz, akkor könnyen látható, hogy a megfelelő pontok Q-ban is konvex helyzetben vannak. Ha $n-1$-hegyet tartalmaz, akkor pedig a megfelelő pontok és p együtt is konvex helyzetben vannak. Tehát kész vagyunk.

A következő javítás nem túl izgalmas, ugyancsak Tóth és Valtr, [17], a fenti $P \setminus \{p\}$ halmazra hasonlóan érvelt, mint Chung és Graham, így újból 1-et faragtak a korlátból.

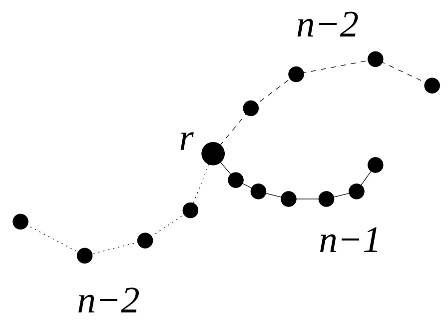
További tíz évvel később Georgios Vlachos következett, [15]. Gondolatmenete úgy indul, mint Tóth és Valtr bizonyítása: Legyen P egy ponthalmaz, amely nem tartalmaz n pontot konvex helyzetben és legyen p egy pontja a konvex burkon. Legyen $Q = P \setminus \{p\}$. Legyen ℓ egy p-t tartalmazó egyenes, amelynek Q minden pontja ugyanazon az oldalán van. Alkalmazzunk egy projektív transzformációt, amely ℓ-et a végtelen távoli egyenesbe viszi, p-t az $y = -\infty$ végtelen távoli pontba, Q-t pedig az R halmazba.

Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy R nem tartalmaz $n-1$-hegyet és n-völgyet. Sőt, nem tartalmaz olyan r pontot, amely egyszerre végpontja egy $n-1$-völgynek és kezdőpontja egy $n-2$-hegynek.

Vlachos egy ennél bonyolultabb tiltott konfigurációt talált.

2. Lemma [15] *Tegyük fel, hogy az R ponthalmaz tartalmaz egy r pontot, amely (1) egy $n-2$-völgy végpontja, (2) egy $n-2$-hegy kezdőpontja, (3) egy $n-1$-völgy kezdőpontja, és az $n-1$-völgy végpotja nem esik egybe az $n-2$-hegy második pontjával.*

Ekkor R tartalmaz egy $n-1$-hegyet vagy n pontot konvex helyzetben, következéséépp P tartalmaz n pontot konvex helyzetben.



3. ábra. Vlachos tiltott konfigurációja.

Ez a bonyolult tiltott konfiguráció egy jobb rekurzióra adott lehetőséget, mint az eredeti, Vlachos ennek felhasználásával azt kapta, hogy

$$f(n) \le \binom{2n-5}{n-2} - \binom{2n-8}{n-3} + \binom{2n-10}{n-3} + 2 \approx \frac{29}{64}\binom{2n-4}{n-2}.$$

A gondolatmenetet tovább finomitották és egyszerűsítették Hossein Mojarraddal [7], es azt kapták, hogy

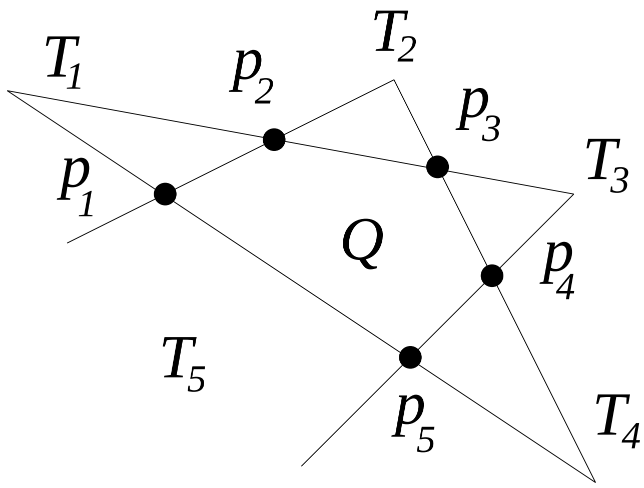
$$f(n) \le \binom{2n-5}{n-2} - \binom{2n-8}{n-3} + 2 \approx \frac{7}{16}\binom{2n-4}{n-2}.$$

Norin és Yuditsky [9] is ezt a tiltott konfigurációt használták, a korlátjuk lényegében ugyanennyi, sőt, valamivel gyengébb, de az ő érvelésük nagyon egyszerű, impozáns, és remekül rámutat arra, hogy az új tiltott konfiguráció miért ad jobb korlátot. Nagyon élvezetes olvasmány.

4 Suk áttörése

Sok konvex n-szög

Legyen $n \geq 3$ es legyen Q egy konvex n-szög. Legyen $R = \{p_1, \ldots, p_n\}$ Q csúcsainak halmaza egy fix körüljárás szerint felsorolva. Tehát R konvex helyzetben van. Tekintsük a sík azon azon $y \notin R$ pontjait, amire $R \cup \{y\}$ is konvex helyzetű. Ezek a pontok n "tüskét" alkotnak, ahol az i-edik tüske (jelöljük ezt T_i-vel) azon pontokbol áll, melyeket az $p_i p_{i+1}$ egyenes elválaszt Q belsejétől, de sem a $p_{i-1}p_i$ sem a $p_{i+1}p_{i+2}$ egyenes nem választ el Q belsejétől (4. ábra). Itt az indexeket modulo n értjük. Ha $n \geq 5$, akkor a tüskék közül legfeljebb kettő lehet végtelen tartomány, a többi tüske háromszög lesz. Vegyük észre, hogy akárhogy is veszünk ki egy-egy pontot mindegyik tüskéből, a kapott ponthalmaz konvex helyzetű lesz. A következő lemma tehát nagyon sok konvex n-szöget talál egy általános helyzetű ponthalmazban, ráadásul ezek jól struktúráltan helyezkednek el. Ez Pór Attila és Pavel Valtr [11] eredménye kicsit átfogalmazva.



4. ábra. A Q konvex sokszög és a hozzá tartozó T_i tüskék.

3. Lemma [11] *Legyen P általános helyzetű ponthalmaz a síkon. Ha $N = |P| > f(2n)$, akkor található egy n elemű $R \subset P$ ponthalmaz konvex helyzetben, hogy az általa meghatározott T_i tüskékre*

$$\prod_{i=1}^{n} |T_i \cap P| \geq \frac{N^n}{(f(2n))^{2n}}.$$

Bizonyítás. Egy egyszerű kettős leszámolással belátjuk, hogy sok konvex $2n$-szög van P-ben. Minden $f(2n)$ elemű részében P-nek találunk legalább egy konvex $2n$-szöget. Ez tehát $\binom{N}{f(2n)}$ konvex

$2n$-szög, de ezek nem mind különbözőek. Egy fix $2n$ elemű konvex helyzetű halmaz P pontosan $\binom{N-2n}{f(2n)-2n}$ darab $f(2n)$ elemű részhalmazában szerepel, tehát legalább

$$\frac{\binom{N}{f(2n)}}{\binom{N-2n}{f(2n)-2n}} \geq \frac{N^{2n}}{(f(2n))^{2n}}$$

különböző konvex $2n$-szöget találtunk P-ben.

Most hagyjuk el ezen konvex $2n$-szögek minden második csúcsát. Így egy konvex n-szöget kapunk. Nagyon durva felső becslést alkalmazva látjuk, hogy ilyen konvex n-szög maximum N^n van, így legalább $N^n/(f(2n))^{2n}$ különböző konvex $2n$-szögből ugyanazt az R konvex n-szöget kell kapnunk. Márpedig ha egy konvex $2n$-szög minden második csúcsát elhagyva pont R-et kapjuk, akkor az R-hez tartozó T_i tüskék mindegyikéből pontosan egy pontot hagytunk el, így a szóba jöhető konvex $2n$-szögek száma maximum $\prod_{i=1}^{n} |T_i \cap P|$. Ez pont a lemma állítását igazolja. □

Áttekintés

Andrew Suk bizonyítása így foglalható össze. Megfelelően nagy általános helyzetű ponthalmazban próbál konvex n-szöget találni. Ehhez a 4. Lemmát használja n helyett egy sokkal kisebb k értékre, és az így talált Q konvex k-szög T_i tüskéiben használja külön-külön Erdős és Szekeres hegyekre és völgyekre vonatkozó éles eredményét. Nem kétféle (hegy és völgy) részhalmazt keres T_i-ben, hanem négyféle "irányultságot" különböztet meg: (1) a Q-felől nézve domború (az Q sokszögre "ráboruló") íveket; (2) a Q felől nézve homorú (Q-tól "elhajló") íveket; (3) a balról, T_{i-1} felől nézve domború íveket; és végül (4) a jobbról, T_{i+1}-felől nézve domború íveket. A pontos definiciót lásd később. A gondolatmenet lényege, hogy (1)-es típusú íveket minden második tüskéből egyesíteni lehet, és még így is konvex helyzetű ponthalmazokat kapunk (5. ábra), valamint egy T_i tüskében lévő "jobbról domború", azaz (4)-es típusú ív és a következő T_{i+1} tüskében lévő "balról domború", azaz (3)-as típusú ív úniója is konvex helyzetű (6. ábra).

Ha k megfelelően kicsi n-hez képest akkor a 3. Lemma nagyon hatékony. Legyen Q a lemma által biztosított k-szög. A Q-hoz tartozó egyetlen átlagos T tüskében a ponthalmazunk N pontjából legalább $N/(f(2k))^2$ darab esik, szóval alig vesztünk valamit. A következő lépés a T-be eső pontpárok közötti szakaszok osztályozása "laposra" , azaz a Q k-szög T-t határoló oldlával majdnem párhuzamosra és "meredekre". Egy klasszikus kombinatorikai tétel, a Dilworth tétel biztosítja, hogy találunk egy nagy halmazt a T-ben, hogy a köztük levő szakaszok mind laposak, vagy mind meredekek. A lapos esetben a klasszikus hegy-völgy tétel alapján találunk nagy (1)-es vagy (2)-es típusú ívet, a meredek esetben ugyanez a tétel biztosítja, hogy nagy (3)-as vagy (4)-es típusú ívet találunk. Itt az (1)-es típusú ívekből olyan sokat tudunk összefűzni, hogy ha így sem kapunk konvex n-szöget, akkor a lapos részek nagyon kicsik kell, hogy legyenek. A meredek részeknél meg épp két ívet tudunk összefűzni, ez adja a körülbelül kettes faktor javulást (konvex $n/2$-szög helyett konvex n-szög), ami Suk bizonyításának a lényege.

A fenti intuiciót a következőkben precízebbé tesszük. A részletekben Suk eredeti bizonyítása, [14], helyett a Holmsen-Mojarrad-Pach-Tardos bizonyítást követjük, [5].

Részletek

Rögzítsünk egy nagy n természetes számot és egy általános helyzetű P ponthalmazt a síkban, ami nem tartalmaz n pontot konvex helyzetben. Célunk egy felső korlátot adni n függvényében az $N = |P|$ számosságra. Ez a korlát (pontosabban az eggyel nagyobb szám) nyilván $f(n)$-nek is korlátja.

Először is választunk egy páros k számot, mely jóval kisebb n-nél. Alkalmazzuk a 4. Tételt erre a k számra. Ha $N \geq f(2k)$, akkor kapunk egy $Q = p_1 p_2 \ldots p_k$ konvex k-szöget úgy hogy a hozzátartozó T_i tüskék teljesítik, hogy

$$\prod_{i=1}^{k} |P_i| \geq \frac{N^k}{(f(2k))^{2k}}, \tag{1}$$

ahol $P_i = P \cap T_i$.

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a T_i tüskék mind háromszögek. Ez a feltevés két különböző okból sem jelent valódi megszorítást. Egyfelől pontosan ugyanezt a becslést lehet nagyon hasonlóan bizonyítani a feltételezés nélkül is, csak ehhez a végtelen tüskékben keresett ponthalmazokat kicsit körülményesebben kellene definiálnunk. Másfelől pedig használhatjuk, hogy $k \geq 5$ esetén legfeljebb kettő tüske nem háromszög. Ha ezekben a végtelen tüskékben egyáltalán nem keresünk konvex helyzetű ponthalmazokat, és csak a véges tüskékre koncentrálunk, akkor a hasonló módszerrel kapott becslés csak egy konstans faktorral lesz rosszabb, azaz a kitevőben szereplő hibatag csak egy additív konstanssal nő.

Most egy fix P_i halmazt vizsgálunk és definiálunk rajta egy részbenrendezést. Az $x, y \in P_i$ pontokra azt mondjuk, hogy $x \prec_i y$, ha a $p_{i-1}p_{i+2}y$ háromszög tartalmazza a $p_{i-1}p_{i+2}x$ háromszöget. Itt és a továbbiakban az indexeket modulo k értjük. Ez nyilván részbenrendezés. A bizonyítás áttekintésében az összehasonlítható pontpárok közötti szakaszt mondtuk meredeknek, a nem összehasonlíthatóak közöttit meg laposnak. *Láncnak* mondjuk P_i egy részhalmazát, ha bármely két eleme összehasonlítható ebben a részbenrendezésben, *antiláncnak* meg az olyan részhalmazt mondjuk, amely nem tartalmaz összehasonlítható elemeket. Dilworth tétele (illetve annak egyszerűbb iránya) szerint van olyan Q_i lánc és R_i antilánc P_i-ben, amelyekre

$$|Q_i| \cdot |R_i| \geq |P_i|. \tag{2}$$

Válasszuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy a $p_{i-1}p_i$ egyenes az y-tengellyel párhuzamos (függőleges) legyen, és p_i p_{i-1} fölött helyezkedjen el. Ezzel meghatároztuk, hogy R részhalmazai közül melyek a hegyek és melyek a völgyek. Legyen A_i és B_i a legnagyobb hegy, illetve völgy az R_i antiláncon belül. A bizonyítás áttekintésében ezeket hívtuk (1)-es és (2)-es típusú íveknek. Az R_i halmazban nincs sem $(|A_i| + 1)$-hegy sem $(|B_i| + 1)$-völgy, így az 1. Tétel szerint

$$|R_i| \leq \binom{|A_i| + |B_i| - 2}{|A_i| - 1}. \tag{3}$$

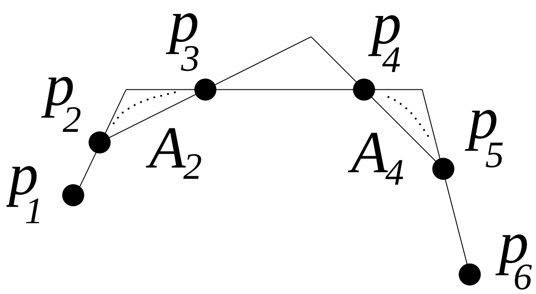
Meg kell még említeni, hogy az 1. Tétel csak olyan ponthalmazokra alkalmazható, ahol az x-koordináták mind különböznek, de mivel feltettük, hogy a T_i tüske egy háromszög, R pedig egy antilánc, ez teljesül.

Most forgassuk el a koordinátarendszert, mégpedig úgy, hogy p_{i+1} épp függőlegesen p_i fölött legyen. Legyen C_i illetve D_i a legnagyobb hegy, illetve völgy a Q_i láncban erre a koordinátarendszerre nézve. A bizonyítás áttekintésében ezeket hívtuk (3)-as illetve (4)-es típusú íveknek. Mivel Q_i lánc, pontjainak x-koordinátái különbözőek, így alkalmazhatjuk az 1. Tételt:

$$|Q_i| \leq \binom{|C_i| + |D_i| - 2}{|C_i| - 1}. \tag{4}$$

Egyszerű geometriai megfontolás mutatja, hogy $A_1 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{k-1}$ konvex helyzetben van (5. ábra), és ugyanez vonatkozik $A_2 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_k$-ra is. (Itt is használjuk a feltevést, hogy minden tüske véges.) Feltettük, hogy a P ponthalmazban nincs n pont konvex helyzetben, így

$$\sum_{i=1}^{k} |A_i| < 2n. \tag{5}$$



5. ábra. $A_2 \cup A_4$ konvex helyzetben van.

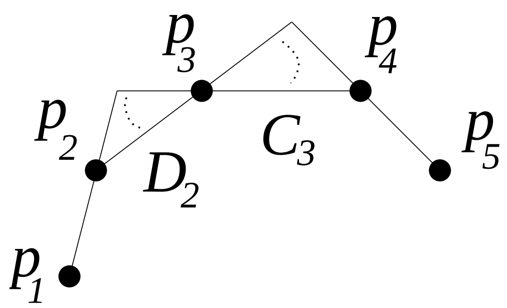
A B_i halmazokat nem tudjuk kombinálni, de egyenként mindegyik konvex helyzetben van, tehát

$$|B_i| < n \tag{6}$$

teljesül minden i-re.

Nem nehéz azt sem belátni, hogy a $D_i \cup C_{i+1}$ halmaz is konvex helyzetben van minden i esetén (6. ábra), így $|D_i| + |C_{i+1}| < n$, tehát

$$\sum_{i=1}^{k} (|C_i| + |D_i|) < kn. \tag{7}$$



6. ábra. $D_2 \cup C_3$ konvex helyzetben van.

A bizonyítás befejezéséhez már csak némi számolásra van szükség. Először a (3) és (6) egyenlőtlenségekből, valamint egy elemi binomiális együtthatókra vonatkozó becslésből kapjuk az alábbiakat:

$$|R_i| \le \binom{|A_i| + |B_i| - 2}{|A_i| - 1} < |B_i|^{|A_i|} < n^{|A_i|}.$$

Szorozzuk össze ezt a becslést minden i-re és alkalmazzuk az (5) egyenlőtlenséget:

$$\prod_{i=1}^{n} |R_i| < n^{\sum_{i=1}^{n} |A_i|} < n^{2n} \tag{8}$$

A (4) egyenlőtlenségnél a binomiális együtthatót durván becsülve kapjuk, hogy $|Q_i| < 2^{|C_i|+|D_i|}$ és így a (7) egyenlőtlenséget is használva adódik, hogy

$$\prod_{i=1}^{n} |Q_i| < 2^{\sum_{i=1}^{n}(|C_i|+|D_i|)} < 2^{kn}. \tag{9}$$

Végül az (1), (2), (8) és (9) egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy

$$\frac{N^k}{(f(2k))^{2k}} \le \prod_{i=1}^{k} |P_i| \le \left(\prod_{i=1}^{k} |Q_i|\right)\left(\prod_{i=1}^{k} |R_i|\right) < 2^{kn} n^{2n}.$$

Itt elég a durva $f(2k) \le f(2k, 2k) = \binom{4k-4}{2k-2} \le 2^{4k}$ becslést alkalmaznunk, és átrendezéssel kapjuk, hogy

$$N < 2^{n+8k+2n\log n/k}.$$

Látszik, hogy k legjobb választása $\sqrt{n \log n}/2$ körül van, ahonnan

$$f(n) \le 2^{n+8\sqrt{n\log n}+1}$$

lesz a végső korlátunk. A +1 azért került a kitevőbe, mert k értéke nem mindig lehet pont $\sqrt{n \log n}/2$, hiszen páros egész számot kell választanunk.

Itt $f(n)$ sejtett értéke (és egyben az alsó korlátja) $2^{n-2}+1$, így a fenti becslés kitevőjében $8\sqrt{n \log n}+3$ tekinthető a hibatagnak. Ebben a 8-as faktor 6 alá csökkenthető azzal, ha $f(2k)$ értékének becslésére a bizonyításban nem Erdős és Szekeres eredeti felső korlátját használtuk, hanem az épp bizonyított jobb becslést alkalmazzuk indukcióval.

Irodalomjegyzék

[1] F. R. K. Chung and R. L. Graham, Forced convex n-gons in the plane, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 367–371.

[2] P. Erdős, G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Mathematica* **2** (1935), 463–470.

[3] P. Erdős, G. Szekeres, On some extremum problems in elementary geometry, *Ann. Univ. Sci. Eötvös Sect. Math* **3-4** (1961), 53–62.

[4] K. Hartnett, A Puzzle of Clever Connections Nears a Happy End, *Quanta Magazine* (2017).

[5] A. Holmsen, H. Mojarrad, J. Pach, G. Tardos, Two extensions of the Erdős-Szekeres problem, arXiv:1710.11415, (2017).

[6] D. J. Kleitman and L. Pachter, Finding convex sets among points in the plane, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 405–410.

[7] H. Mojarrad, G. Vlachos, An Improved Upper Bound for the Erdős-Szekeres Conjecture, *Discrete and Computational Geometry* **56** (2016), 165–180.

[8] W. Morris, V. Soltan, The Erdős-Szekeres problem on points in convex position–a survey, *Bulletin of the American Mathematical Society* **37**, (2000), 437–458.

[9] S. Norin, Y. Yuditsky, Erdős-Szekeres without induction, *Discrete and Computational Geometry* **55** (2016), 963–971.

[10] Pach J., A Happy End probléma – A kombinatorikus geometria kezdetei, Új matematikai mozaik (Hraskó A., szerk.) Typotex, Budapest, 2002, 223-242.

[11] A. Pór and P. Valtr, The partitioned version of the Erdős–Szekeres theorem, *Discrete and Computational Geometry* **28** (2002), 625–637.

[12] G. Szekeres, L. Peters, Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem, *The ANZIAM Journal* **48** (2006), 151–164.

[13] F. P. Ramsey: On a problem of formal logic, *Proceedings of the London Mathematical Society* **30** (1930), 338–384.

[14] A. Suk, On the Erdős-Szekeres convex polygon problem, *Journal of the American Mathematical Society* **30** (2017), 1047–1053.

[15] G. Vlachos, On a conjecture of Erdős and Szekeres, arXiv:1505.07549, (2015).

[16] G. Tóth and P. Valtr, Note on the Erdős-Szekeres theorem, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 457–459.

[17] G. Tóth and P. Valtr, The Erdős-Szekeres theorem, upper bounds and generalizations, Discrete and Computational Geometry - Papers from the MSRI Special Program (J. E. Goodman et al. eds.), *MSRI Publications* **52** Cambridge University Press, Cambridge (2005), 557–568.