ALGEBRAI GEOMETRIA
5. feladatsor

1. Legyenek $C, D \subset \mathbf{P}^2$ sima projektív síkgörbék, $P \in C \cap D$ pedig egy metszéspontjuk. Igazoljuk, hogy $i_P(C, D) \geq 2$ pontosan akkor áll fenn, ha a C és D görbék P-beli érintői megegyeznek.

2. Legyen $\phi : X \to C$ szürjektív morfizmus, ahol X sima projektív felület, C pedig sima projektív görbe. Legyen $F = \phi^{-1}(P)$ egy $P \in C$ pont feletti fibrum. Mutassuk meg, hogy $(F, F) = 0$.

3. Legyen $\phi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ automorfizmus (azaz $\mathbf{P}^2$ izomorfizmusa önmagával).
a) Ellenőrizzük, hogy ha C, D projektív síkgörbék, akkor minden $P \in C \cap D$ pontra

$$i_P(C, D) = i_{\phi(P)}(\phi(C), \phi(D)).$$

b) Mutassuk meg, hogy ϕ egyenest egyenesbe visz.
c) [fakultatív] Igazoljuk, hogy ϕ projektív lineáris transzformáció, azaz $\phi \in \mathrm{PGL}(3, k)$.

4. Konstruáljuk meg a már ismert $y^2 = x^3 + x^2$ affin síkgörbe normalizáltját az $\mathbf{A}^2$-beli origó felfújásával.