A Deligne-Simpson Problémáról (folyamatban lévő munka O. Biquard-ral)

Szabó Szilárd

Magyar Tudomány Napja
Fiatal Kutatói Ülésszak
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

2008. november 17.

Deligne kérdése

Legyenek $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n$ konjugálási osztályok $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{C})$-ben.

Kérdés (P. Deligne, 1989)

Mikor léteznek olyan $A_j \in \mathcal{C}_j$ mátrixok minden j-re, amelyekre

$$A_0 A_1 \cdots A_n = \mathrm{I}?$$

Deligne kérdése

Legyenek $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n$ konjugálási osztályok $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{C})$-ben.

Kérdés (P. Deligne, 1989)

Mikor léteznek olyan $A_j \in \mathcal{C}_j$ mátrixok minden j-re, amelyekre

$$A_0 A_1 \cdots A_n = \mathrm{I}?$$

Megjegyzés

Triviális szükséges feltétel:

$$\det(\mathcal{C}_0)\det(\mathcal{C}_1)\cdots\det(\mathcal{C}_n) = 1.$$

Motiváció

Legyenek $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}$ különböző pontok a síkon, és $p_0 = \infty \in \mathbb{CP}^1$. Legyen $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ és $x_0 \in \mathbb{CP}^1 \setminus P$. Ekkor

$$\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus P, x_0) = F_n,$$

az n-elemű szabad csoport. Generátorok: $\gamma_j =$ pozitív irányítású hurok p_j körül, minden $1 \leq j \leq n$-re.

Motiváció

Legyenek $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}$ különböző pontok a síkon, és $p_0 = \infty \in \mathbb{CP}^1$. Legyen $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ és $x_0 \in \mathbb{CP}^1 \setminus P$. Ekkor

$$\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus P, x_0) = F_n,$$

az n-elemű szabad csoport. Generátorok: $\gamma_j =$ pozitív irányítású hurok p_j körül, minden $1 \leq j \leq n$-re.

$\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus P, x_0)$ reprezentációi $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{C})$-ben $\leftrightsquigarrow A_1, \dots, A_n \in \mathrm{Gl}_r(\mathbb{C})$

Motiváció

Legyenek $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}$ különböző pontok a síkon, és $p_0 = \infty \in \mathbb{CP}^1$. Legyen $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ és $x_0 \in \mathbb{CP}^1 \setminus P$. Ekkor

$$\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus P, x_0) = F_n,$$

az n-elemű szabad csoport. Generátorok: $\gamma_j =$ pozitív irányítású hurok p_j körül, minden $1 \leq j \leq n$-re.

$\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus P, x_0)$ reprezentációi $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{C})$-ben $\leftrightsquigarrow A_1, \dots, A_n \in \mathrm{Gl}_r(\mathbb{C})$ $\leftrightsquigarrow A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathrm{Gl}_r(\mathbb{C})$ amelyekre $A_0 A_1 \cdots A_n = \mathrm{I}$.

Simpson eredménye

Legyen minden $1 \leq j \leq n$-re $\mu^j \in \mathbb{C}$ olyan, amelyre a

$$\mathcal{C}_j - \mu^j \, \mathsf{I}$$

rangja minimális. Jelölje ezt a rangot r_j.

Tétel (C. Simpson, 1992)

Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}_0$ sajátértékei különbözők és generikusak. Ekkor pontosan akkor létezik $A_j \in \mathcal{C}_j$ amelyekre

$$A_0 A_1 \cdots A_n = \mathsf{I},$$

ha a következő két feltétel teljesül:

1. $\sum_{j=1}^{n} r_j \geq r$;
2. $\sum_{j=0}^{n} \dim(\mathcal{C}_j) \geq 2r^2 - 2$.

Szükségesség

Egy megfelelő 1-rangú reprezentációval tenzorizálva feltehető, hogy $\mathcal{C}_j - \mathsf{I}$ rangja r_j. Ha létezik $A_0, A_1, \dots, A_n$ megoldás, akkor

$$A_0^{-1} = A_1 \cdots A_n,$$

ahol minden j-re

$$A_j = \mathsf{I} + r_j\text{-rangú mátrix}.$$

Tehát

$$r = \mathrm{rk}(\mathcal{C}_0) \leq r_1 + \cdots + r_n.$$

Szükségesség

Egy megfelelő 1-rangú reprezentációval tenzorizálva feltehető, hogy $\mathcal{C}_j - \mathrm{I}$ rangja r_j. Ha létezik $A_0, A_1, \ldots, A_n$ megoldás, akkor

$$A_0^{-1} = A_1 \cdots A_n,$$

ahol minden j-re

$$A_j = \mathrm{I} + r_j\text{-rangú mátrix.}$$

Tehát

$$r = \mathrm{rk}(\mathcal{C}_0) \leq r_1 + \cdots + r_n.$$

Ha léteznek megoldások, akkor egy

$$\sum_{j=0}^{n} \dim(\mathcal{C}_j) - 2r^2 + 2$$

dimenziós teret alkotnak, tehát általános sajátértékekre ennek a dimenziónak nemnegatívnak kell lennie.

Fourier-transzformált

Legyen $\rho : \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus P, x_0) \to \mathrm{Gl}_r(\mathbb{C})$ egy reprezentáció, amelyre $\rho(\gamma_j) \in \mathcal{C}_j$. Ekkor ρ Fourier-transzformáltja egy

$$\widehat{\rho} : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \mathrm{Gl}_{\hat{r}}(\mathbb{C})$$

reprezentáció, ahol

$$\hat{r} = \sum_{j=1}^{n} r_j .$$

Fourier-transzformált, folyt.

Legyen $\tilde{\mathcal{C}}_j$ az a $\mathrm{Gl}_{r_j}(\mathbb{C})$-beli konjugálási osztály, amelyre $\mathcal{C}_j = \tilde{\mathcal{C}}_j \oplus \mathrm{I}$. Ismert, hogy $\widehat{\rho}$ értéke a $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ generátorán teljesíti a következőket:

1. alkalmas bázisban valamely $\tilde{A}_j \in \tilde{\mathcal{C}}_j$ mátrixokra az alábbi alakú:
$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & * & \dots & * \\ * & \tilde{A}_2 & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \\ * & * & \dots & \tilde{A}_n \end{pmatrix}$$
2. konjugálási osztálya $\mathcal{C}_0 \oplus \mathrm{I}$.

Fourier-transzformált, folyt.

Legyen $\tilde{\mathcal{C}}_j$ az a $\mathrm{Gl}_{r_j}(\mathbb{C})$-beli konjugálási osztály, amelyre $\mathcal{C}_j = \tilde{\mathcal{C}}_j \oplus \mathrm{I}$. Ismert, hogy $\widehat{\rho}$ értéke a $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ generátorán teljesíti a következőket:

1. alkalmas bázisban valamely $\tilde{A}_j \in \tilde{\mathcal{C}}_j$ mátrixokra az alábbi alakú:
$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & * & \dots & * \\ * & \tilde{A}_2 & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \\ * & * & \dots & \tilde{A}_n \end{pmatrix}$$
2. konjugálási osztálya $\mathcal{C}_0 \oplus \mathrm{I}$.

Megfordítva: minden olyan mátrixnak, amely teljesíti az 1-2 feltételeket, az inverz Fourier-transzformáltja megoldást ad $A_0 A_1 \cdots A_n = \mathrm{I}$-re.

Elegendőség

Feltesszük, hogy minden j-re $\overline{\mathcal{C}_j} = \mathcal{C}_j$.
Legyen $\mathcal{A} \subset M_{\hat{r}}(\mathbb{C})$ az első feltételt teljesítő mátrixok halmaza.
Ekkor $\mathcal{A}$ egy affin algebrai részsokaság, dimenziója:

$$\dim(\mathcal{A}) = \hat{r}^2 - \sum_{j=1}^{n} r_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \dim(\tilde{\mathcal{C}}_j).$$

Hasonlóan, legyen $\mathcal{B} \subset \mathrm{Gl}_{\hat{r}}(\mathbb{C})$ a második feltételt teljesítő mátrixok halmaza; $\mathcal{B}$ is algebrai részsokaság, dimenziója:

$$\dim(\mathcal{B}) = \hat{r}^2 - r - (\hat{r} - r)^2.$$

Elegendőség, folyt.

Ezért,

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{A})+\dim(\mathcal{B})-\hat{r}^2 &= \sum_{j=1}^{n}\dim(\mathcal{C}_j)+\hat{r}-r^2-r+\sum_{j=1}^{n}\dim(\tilde{\mathcal{C}}_j)\\ &\geq \hat{r}-2+\sum_{j=1}^{n}\dim(\tilde{\mathcal{C}}_j)\geq 0\end{aligned}$$

a $\sum_{j=0}^{n}\dim(\mathcal{C}_j)\geq 2r^2-2$ feltevés miatt.

Elegendőség, folyt.

Ezért,

$$\dim(\mathcal{A}) + \dim(\mathcal{B}) - \hat{r}^2 = \sum_{j=1}^{n} \dim(\mathcal{C}_j) + \hat{r} - r^2 - r + \sum_{j=1}^{n} \dim(\tilde{\mathcal{C}}_j)$$
$$\geq \hat{r} - 2 + \sum_{j=1}^{n} \dim(\tilde{\mathcal{C}}_j) \geq 0$$

a $\sum_{j=0}^{n} \dim(\mathcal{C}_j) \geq 2r^2 - 2$ feltevés miatt.
Bézout tétele alapján $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ metszi egymást $P(M_{\hat{r}}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C})$-ben.

Elegendőség, folyt.

Ezért,

$$\dim(\mathcal{A}) + \dim(\mathcal{B}) - \hat{r}^2 = \sum_{j=1}^{n} \dim(\mathcal{C}_j) + \hat{r} - r^2 - r + \sum_{j=1}^{n} \dim(\tilde{\mathcal{C}}_j)$$
$$\geq \hat{r} - 2 + \sum_{j=1}^{n} \dim(\tilde{\mathcal{C}}_j) \geq 0$$

a $\sum_{j=0}^{n} \dim(\mathcal{C}_j) \geq 2r^2 - 2$ feltevés miatt.
Bézout tétele alapján $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ metszi egymást $P(M_{\hat{r}}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C})$-ben.
Ha $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset P(M_{\hat{r}}(\mathbb{C}) \oplus 0)$, akkor $\mathcal{C}_0$ sajátértékeit perturbálva már lesz nem-ideális megoldás.

Egy példa: a Lamé-rendszer

Legyen $P = \{0, 1, t, \infty\}$ és minden $j \in \{0, 1, 2, 3\}$-ra $\mathcal{C}_j$ a diag$(i, -i)$ konjugálási osztálya. Tenzorizáljunk azzal az 1-rangú τ reprezentációval, amelyre minden $j \in \{1, 2, 3\}$-ra $\tau(\gamma_j) = i \in \mathbb{C}^*$. Ekkor a módosított konjugálási osztályok:

$$\mathcal{C}_j = \mathrm{diag}(-1, 1).$$

Egy példa: a Lamé-rendszer

Legyen $P = \{0, 1, t, \infty\}$ és minden $j \in \{0, 1, 2, 3\}$-ra $\mathcal{C}_j$ a $\mathrm{diag}(i, -i)$ konjugálási osztálya. Tenzorizáljunk azzal az 1-rangú τ reprezentációval, amelyre minden $j \in \{1, 2, 3\}$-ra $\tau(\gamma_j) = i \in \mathbb{C}^*$. Ekkor a módosított konjugálási osztályok:

$$\mathcal{C}_j = \mathrm{diag}(-1, 1).$$

Fourier-transzformálás után: kersünk egy olyan

$$B = \begin{pmatrix} -1 & a_1 & a_2 \\ b_3 & -1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot, amelynek sajátértékei: $(-1, 1, 1)$.
2 független feltétel 6 változóban.

A Lamé-rendszer, folyt.

Legyen például $b_3 = b_1 = 0$. Ekkor az egyenletek:

$$\begin{aligned} a_1 a_3 b_2 &= 0 \\ a_2 b_2 &= 4, \end{aligned}$$

amelynek egy megoldása: $a_1 = a_3 = 0, a_2 = b_2 = 2$.

Kac-Moody gyökrendszerek

Legyen $G = (V, E)$ egy véges csillagszerű gráf, $n : V \to \mathbb{Z}$ csúcsainak egy "színezése". Minden $v \in V$-re jelöljük e_v-vel a v karakterisztikus függvényt. Vezessük be a következő szimmetrikus bilineáris formát $\mathbb{Z}^V$-n:

$$(e_v, e_w) = \begin{cases} 2 & \text{ha} \quad v = v' \\ -1 & \text{ha} \quad (v, v') \in E \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Kac-Moody gyökrendszerek

Legyen $G = (V, E)$ egy véges csillagszerű gráf, $n : V \to \mathbb{Z}$ csúcsainak egy "színezése". Minden $v \in V$-re jelöljük e_v-vel a v karakterisztikus függvényet. Vezessük be a következő szimmetrikus bilineáris formát $\mathbb{Z}^V$-n:

$$(e_v, e_w) = \begin{cases} 2 & \text{ha} \quad v = v' \\ -1 & \text{ha} \quad (v, v') \in E \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Rögzített $v \in V$-re értelmezzük a

$$t_v : \mathbb{Z}^V \to \mathbb{Z}^V$$

v-re való tükrözést a következő képlettel:

$$t_v(n) = n - (e_v, n)e_v.$$

Kac-Moody gyökrendszerek, folyt.

Legyen

$$W = \langle t_v : v \in V \rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^V)$$

a Weyl-csoport. Az

$$\{e_v : v \in V\}$$

halmaz W menti pályaterét valós gyököknek nevezzük. Definiálhatunk továbbá képzetes gyököket is.

Kac-Moody gyökrendszerek, folyt.

Legyen

$$W = \langle t_v : v \in V \rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^V)$$

a Weyl-csoport. Az

$$\{e_v : v \in V\}$$

halmaz W menti pályaterét valós gyököknek nevezzük.
Definiálhatunk továbbá képzetes gyököket is.
A $(\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n)$ adatokhoz hozzárendelhető egy G véges csillagszerű gráf és egy $n \in \mathbb{Z}^V$.

Tétel (W. Crawley-Boevey, 2003)

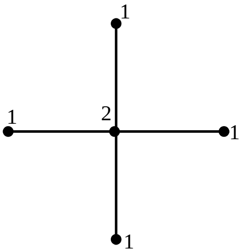
Akkor és csak akkor van megoldása $A_0 A_1 \cdots A_n = \mathrm{I}$-nek $A_j \in \mathcal{C}_j$-ben, ha n valós vagy képzetes gyök.

A Lamé-rendszer gyökrendszere

A $P = \{0, 1, t, \infty\}$,

$$\mathcal{C}_j = \mathrm{diag}(-1, 1)$$

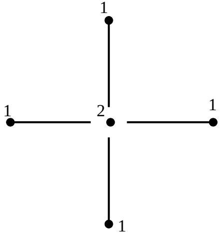
esetben a hozzárendelt gráf a $\tilde{D}_4$ affin Dynkin-diagram:



Fourier-transzformált gyökrendszereken

$\tilde{D}_4$-nek létezik két különböző “olvasata”.

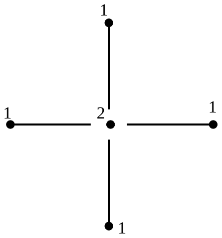
Fourier-transzformálás előtt:



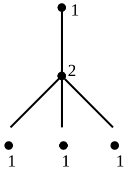
Fourier-transzformált gyökrendszereken

$\tilde{D}_4$-nek létezik két különböző “olvasata”.

Fourier-transzformálás előtt:



Fourier-transzformálás után:



Cél

1. *Leírni a Fourier-transzformáltat általános Kac-Moody gyökrendszereken.*
2. *Egyszerűbb bizonyítást adni a Deligne-Simpson problémával kapcsolatos eredményekre.*