

Kis csomóelmélet

Stipsicz András

1. fejezet

Csomók és vetületeik

1.1 Csomók

1.1.1 definíció. Az \mathbb{R}^3 (vagy S^3) tér egy $K \subset \mathbb{R}^3$, az S^1 körvonallal homeomorf részét *csomónak* nevezzük. Egy $K \subset \mathbb{R}^3$ csomó *szelíd*, ha minden $x \in K$ pontnak létezik olyan U_x (\mathbb{R}^3 -beli) környezete, hogy az $(U_x, K \cap U_x)$ pár a (D^3, D^1) párral homeomorf, ahol D^1 a D^3 golyó átmérője. (A nem szelíd csomókat *vadnak* hívjuk.)

A továbbiakban csak szelíd csomókkal fogunk foglalkozni. Egy alternatív definíció lenne, hogy megköveteljük, a csomó egyenes szakasz-darabokból álljon, vagy hogy differenciálható részsokaság legyen.

1.1.2 definíció. A K_1 és K_2 csomók ekvivalensek, ha létezik \mathbb{R}^3 -nak olyan h irányítástartó homeomorfizmusa, mely az egyiket a másikba viszi.

Egy alternatív definíciót ad az, hogy egy csomót az S^1 körvonallal beágyazott képeként definiálunk, ekkor a vad csomókat elkerülendő a beágyazásról kell feltenni, hogy szakaszonként lineáris (vagy differenciálható) legyen. Két kézenfekvő ekvivalencia adódik ebben az esetben:

1.1.3 definíció. 1. Az $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ beágyazások *izotópok*, ha létezik egy olyan, a szinteket megőrző, tehát $F(x, t) = (f(x, t), t)$ alakú $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$ beágyazás, melyre

$$f(x, 0) = f_0(x), \quad f(x, 1) = f_1(x).$$

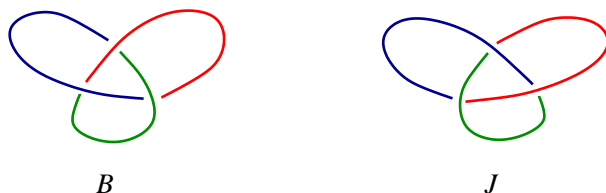
2. Az $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ beágyazások *beágyazottan izotópok*, ha létezik egy olyan $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$, a szinteket megőrző beágyazás, melyre a $H(y, t) = (h_t(y), t)$ definícióval

$$f_1 = h_1 \circ f_0, \quad h_0 = id_Y.$$

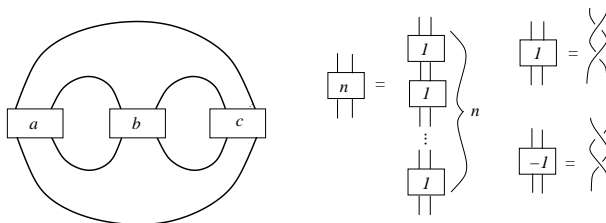
Bármely két csomó izotóp (a fenti 1. értelemben), viszont a beágyazott izotópiát használva visszakapjuk az első definíció ekvivalencia-fogalmát. A továbbiakban tehát az 1.1.3(2.) definíció szerinti ekvivalenci-fogalmat tekintjük (bár sokszor 'izotóp' csomókról beszélünk akkor is, amikor valójában 'beágyazottan izotópra' gondolunk.) A továbbiakban csak *irányított* csomókat tekintünk, tehát rögzítjük a csomó egy körüljárását.

Legyen $pr_P: \mathbb{R}^3 \rightarrow P$ egy $P \leq \mathbb{R}^3$ síkra való (merőleges) vetítés. Egy K csomóra a $pr_P(K)$ kép a csomó vetülete. Tegyük fel, hogy K egy szakaszonként lineáris leképezéssel van megadva. A pr_P vetítést *regulárisnak* nevezzük, amennyiben csak duplapontok vannak a vetületben (vagyis a vetület minden t pontjára $|pr_P^{-1}(t) \cap K| \leq 2$) és K egyik csúcsa sem duplapont. Duplapontoknál az alul lévő szál megszakításával kapjuk a csomó *diagramját*, mely már (beágyazott izotópia erejéig) meghatározza a csomót. A kapott objektumot a csomó (pr_P vetítéshez tartozó) *diagramjának* nevezzük. A csomóelmélet célja: osztályozni a csomókat, illetve azok érdekes tulajdonságait meghatározni, felismerni.

1.1.4 példák. • A síkon egy beágyazott körvonallal, mint diagrammal megadott csomó a *triviális csomó*.



1.1 ábra: A két háromlevelű csomó; B a balkezes, míg J a jobbkezes változat.



1.2 ábra: A $P(a, b, c)$ perccsomó ($a, b, c \in \mathbb{Z}$).

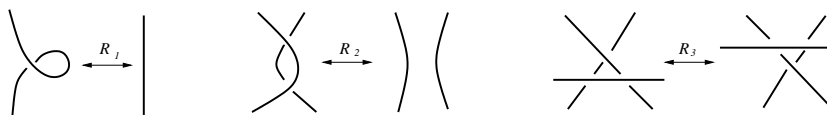
- Az 1.1 ábrán megadott két csomó a (bal- és jobbkezes) *háromlevelű* (vagy *trefoil*) csomó. A jobbkezes háromlevelű csomó tagja egy általánosabb csomó-osztálynak, az ún. pozitív tórikus csomók osztályának: Legyen p és q két relatív prím természetes szám. Az \mathbb{R}^2 síkon vegyünk a p/q meredekségű, origón átmenő egyenest. \mathbb{R}^2 -et a \mathbb{Z}^2 egységgrác szerint faktorizálva egy tóruszt kapunk, az említett egyenes képe pedig egy γ zárt görbe lesz ezen a tóruszon. A tórusz standard \mathbb{R}^3 -beli (vagy S^3 -beli) beágyazását tekintve γ képét (pozitív) *tórikus* (p, q) -*csomónak* nevezzük és $T(p, q)$ -val jelöljük. (Negatív tórikus csomókat kapunk akkor, ha a $T(p, q)$ csomóknak valamely \mathbb{R}^3 -beli síkra vett tükörképét tekintjük.)
- Az 1.2 ábra-beli csomók családját, ahol a négyzetekben lévő egész számok megfelelő (pozitív esetben jobbkezes, negatív esetben balkezes) csavarokat jelölnek, *perccsomóknak* nevezzük.

1.1.5 feladat. Az a, b, c értékek mely paritása mellett lesz a $P(a, b, c)$ perccsomó valóban csomó (tehát összefüggő)?

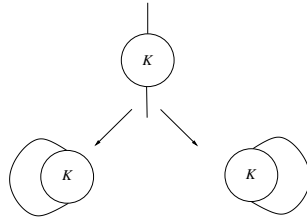
A diagram változtatásának az 1.3 ábrán mutatott három típusa nyilván nem változtatja meg a csomó ekvivalencia-osztályát. Ezeket a változtatásokat R_1, R_2 és R_3 *Reidemeister mozgásoknak* nevezzük. A fenti megfigyelés megfordította azonban már kevésbé nyilvánvaló. (Az alább következő tételt a továbbiakban bizonyítás nélkül elfogadjuk.)

1.1.6 tétel (Reidemeister). *Legyen D_1 és D_2 két adott csomódiagram. A két diagram pontosan akkor reprezentálja ugyanazt a csomót (beágyazott izotópia erejéig), ha a két diagram egymásba alakítható a Reidemeister mozgásoknak és azok inverzeinek véges sokszori alkalmazásával.*

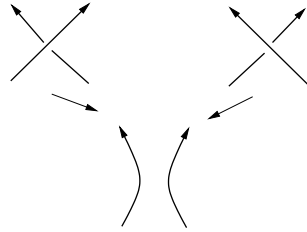
1.1.7 megjegyzés. Hasonló módon tekinthetnénk a csomó vetületét az S^2 gömbfelületre is, majd a vetületnek csak a sík “véges” tartományába eső részét ábrázoljuk. (Ezt az elvet valóban használni is fogjuk.) Látszólag egy újabb mozgás bevezetése szükséges (a végtelen távoli ponton való áthaladás), de nem nehéz látni, hogy ez a Reidemeister mozgásokkal is megvalósítható, lásd az 1.4 ábrát.



1.3 ábra: A Reidemeister mozgások



1.4 ábra: Az S^2 végtelen távoli pontján történő áthaladás. A függőleges szakaszok a végtelen távoli pontban találkoznak, és egyik vagy másik irányba elmozdítva a végtelen távoli ponttól kapjuk a két alsó ábrát. Ezeket Reidemeister mozgásokkal egymásba lehet transzformálni.



1.5 ábra: Egy kereszteződés irányított feloldása

1.2 Invariánsok

A fent megismert mozgásokkal sokszor egyszerűen megmutatható, hogy két különböző diagram valójában ugyanazt a csomót adja meg. Nehezebb azonban azt látni, hogy bizonyos csomók különbözőek; erre szolgálnak a *csomóinvariánsok*.

Az első ilyen invariáns geometriai eredetű, és általában nem könnyű a pontos értékét meghatározni. A csomó *génuszának* definíciója a következő nevezetes tétel alapszik:

1.2.1 tétel (Seifert). *Minden $K \subset S^3$ csomóra létezik egy olyan $\Sigma \subset S^3$ beágyazott, irányított felület, melyre $\partial\Sigma = K$. Az ilyen felületeket a csomó Seifert felületeinek nevezzük.*

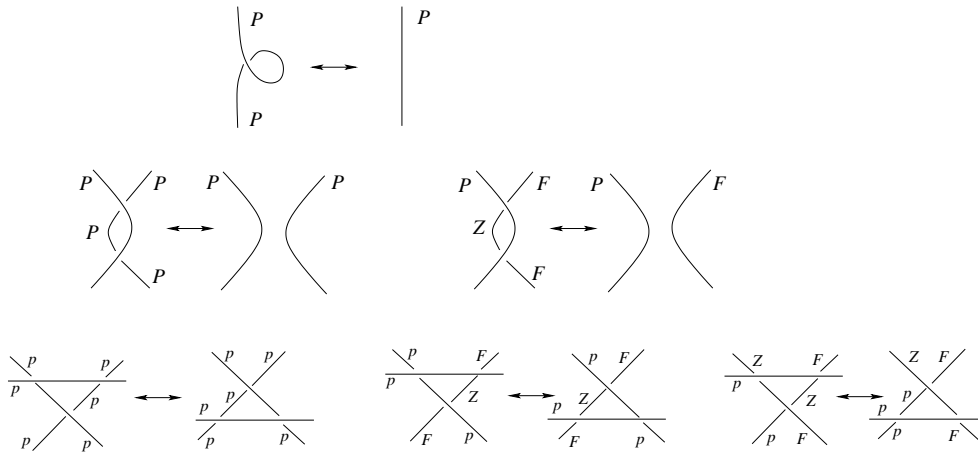
1.2.2 definíció. Egy adott K csomóra a $g(K)$ génusz az összes K -hoz tartozó Seifert felületek génuszainak minimuma.

Bizonyítás [Az 1.2.1 tétel bizonyítása.] Egy olyan felület, melyre $\partial\Sigma = K$ teljesül, elég egyszerűen megkapható: színezzük a felület tartományait (vagyis a komplementum komponenseit) sakktábla-szerűen feketére vagy fehérre, vegyük az egyik színhez tartozó tartományokat, és ragasszuk össze őket a csúcsaiknál a csomó által diktált szalagokkal. Az eredmény egy megfelelő határral rendelkező felület lesz, de esetleg nem irányítható.

Az irányításhoz vegyünk egy irányítást a csomón, és tekintsük egy diagramjának *irányított feloldását*, vagyis minden kereszteződést helyettesítsünk az 1.5 ábrán mutatott módon. A kapott irányított körök irányított körlapokat határolnak, és a megfelelő szalagokat hozzájuk ragasztva egy irányított felületet kapunk, melynek határa K . \square

Nyilvánvalóan $g(K)$ nemnegatív egész, és nem nehéz belátni, hogy $g(K) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha K a triviális csomó. Egyelőre azonban még nem láttunk bizonyítást arra, hogy létezik nem-triviális csomó. Ehhez egy egyszerűbb invariánst vezetünk be.

1.2.3 definíció. Legyen P, F, Z három rögzített szín. A K csomó egy D diagramja *három-színezhető*, ha a diagram minden ívéhez hozzá tudjuk úgy rendelni a színek valamelyikét, hogy egy kereszteződésben vagy minden szál egyszínű, vagy mind különböző, és a diagram nem egyszínű (vagyis a színezés nem triviális).



1.6 ábra: A három-színezhetőség invarianciája Reidemeister mozgásokra

1.2.4 lemma. *Ha D_1, D_2 a K csomó két diagramja, akkor D_1 pontosan akkor három-színezhető, amikor D_2 . Következésképp a három-színezhetőség nem a diagram, hanem a csomó egy tulajdonsága.*

Bizonyítás Pusztán azt kell belátnunk, hogy ha egy diagram három-színezhető, akkor egy Reidemeister mozgás alkalmazása ezt a tulajdonságot nem változtatja meg. Az első mozgásnál keletkező huroknak a kereszteződésben két íve találkozik, és így definíció szerint minden szereplő ív egyszínű, következésképp őrzi a három-színezhetőséget. A második mozgás esetén két esetet kell megkülönböztetnünk, attól függően, hogy a két ív azonos, vagy különböző színű. A harmadik mozgásra három esetet különböztetünk meg, attól függően, hogy (valamely irányításra) a három befelé mutató szakasz színezésében egy, két vagy három szín szerepel. Az 1.6 ábra mutatja a bizonyítást. \square

1.2.5 következmény. *A triviális csomó és a háromlevelű csomó nem ekvivalensek.*

Bizonyítás A két csomó kézenfekvő diagramjaira az egyik három-színezhető, a másik nem. \square

1.2.6 megjegyzések. • Valójában egy csomó három-színezhetősége az $S^3 - K$ komplementum $\pi_1(S^3 - K)$ fundamentális csoportjának (a *csomó csoportjának*) egy tulajdonsága: avval ekvivalens, hogy létezik-e olyan $\pi_1(S^3 - K) \rightarrow S_3$ homomorfizmus, mely a csomó körüli kis köröket transzpozíciókba viszi.

- A három-színezhetőség definíciójában a $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ három-elemű ciklikus csoport elemeivel is színezhettünk volna, ahol tehát a szabály az, hogy a színezés legalább két elemet használ, és egy kereszteződésnél a felső szálhoz rendelt b , és a két alsóhoz rendelt a és c értékekre $a + c = 2b$ áll fenn.

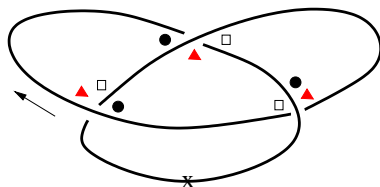
1.2.7 feladatok. (a) Lássuk be, hogy egy csomó diagramjának három-színezése pontosan akkor nem triviális, ha mindhárom színt használja.

(b) Vegyük a $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$, N -elemű ciklikus csoportot ($N \geq 3$), és színezzük ennek elemeivel egy csomó egy diagramjának íveit. Tegyük fel, hogy a színezés nem-triviális (vagyis nem csak egy színt használ), és a keresztezésekben teljesíti a fenti $a + c = 2b$ szabályt. Ekkor a diagram N -színezhető. Lássuk be, hogy ez a tulajdonság a csomó egy tulajdonsága, vagyis általánosítsuk az 1.2.4 lemmát minden N -re.

(c) Lássuk be, hogy a $T(2, 5)$ tórikus csomó nem három-színezhető, de 5-színezhető. (Tehát $T(2, 5)$ különbözik mind a triviális, mind a háromlevelű csomótól.)

(d) Lássuk be, hogy a $\{T(2, p) \mid p \text{ prím}\}$ tórikus csomók családjában a tagok páronként különböznek.

(e) Számítsuk ki a háromlevelű csomó génuszát.



1.7 ábra: A háromlevelű csomó Kauffman állapotai



1.8 ábra: Az s - és d -értékek lokális definíciója egy Kauffman állapotról

1.3 Az Alexander polinom

A csomó csoportja a csomónak sokkal érzékenyebb, de sokszor nehezebben összehasonlítható invariánsa. A Wirtinger prezentációból könnyen látható, hogy a $G = \pi_1(S^3 - K)$ csoport G/G' Abelizáltja végtelen ciklikus, úgyhogy ez sem használható arra a célra, hogy ennek segítségével csomókat különböztessünk meg. Vegyük azonban a $C = G'/G''$ Abel csoportot. Ez éppen a csomó komplementumának a $G' \leq \pi_1(S^3 - K)$ részcsoporthoz tartozó végtelenszeres fedésének első homológia-csoportja. Mint Abel csoport ezen hat \mathbb{Z} , de a fedőtranszformációk hatása egy másik \mathbb{Z} -hatást, és így egy Laurent polinom-hatást is definiál, így C valójában egy $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ modulus. Belátható, hogy mint ilyen, egy ciklikus modulus, tehát előáll C/I alakban, ahol I egy főideál. Ekkor I -t egy $\Delta_K(t)$ Laurent polinom generálja, mely $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -beli egység (tehát $\pm t^n$) erejéig van meghatározva. Az így kapott polinom a csomó Alexander polinomja.

A fenti definíció ugyan nem függ semmilyen választástól (és láthatóan csak a csomó csoportjától függ), de nagyon nehéz az invariánst kiszámítani. Alább egy kombinatorikus átfogalmazást fogunk megmutatni, bár annak belátását, hogy a kapott polinom a fenti definíciót kielégíti, nem fogjuk tárgyalni.

Legyen tehát D egy adott K csomó diagramja, melyben a kereszteződések halmazát jelölje $Cr(D)$, a tartományokét pedig $Dom(D)$. (A tartományok a vetület komplementumának komponensei.) Jelöljük meg a diagram egyik ívét egy x jellel, és legyen $Dom^0(D)$ azon tartományok halmaza, melyek nem tartalmazzák x -et a határukon (vagyis hagyjuk el a kitüntetett él melletti két tartományt).

1.3.1 állítás. *A $Dom^0(D)$ és a $Cr(D)$ halmazok azonos számosságúak.*

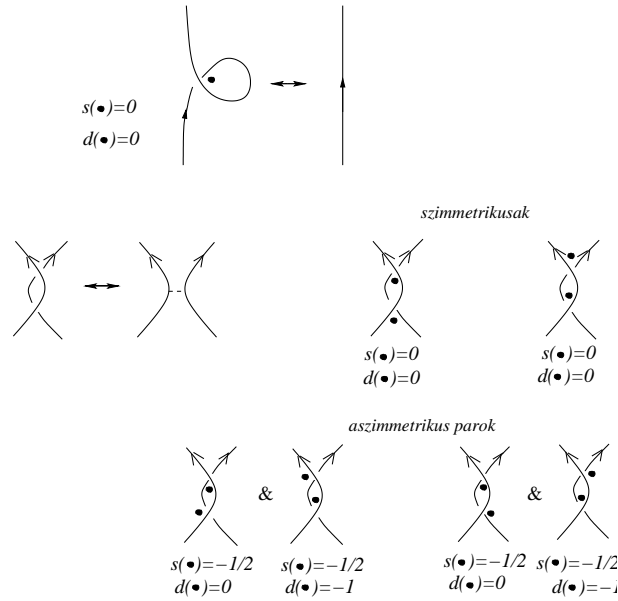
Bizonyítás Ha c jelöli a kereszteződések számát, akkor a vetületben $2c$ él van (hiszen minden csúcsból 4 él megy ki, de így minden élt kétszer számoltunk), tehát Euler poliéder tétele miatt $d - 2c + c = 2$, ahol d a tartományok száma. Ebből az állítás triviálisan adódik. \square

1.3.2 definíció. Egy olyan $\sigma: Cr(D) \rightarrow Dom^0(D)$ bijekciót, melyre minden $c \in Cr(D)$ esetén c benne van $\sigma(c)$ határában (vagyis minden kereszteződéshez egy mellette fekvő tartományt rendel), a D diagram egy *Kauffman állapotának* nevezünk. A D diagram Kauffman állapotainak halmazát $Ks(D)$ fogja jelölni.

1.3.3 példa. A háromlevelű csomónak az 1.7 ábrán bemutatott három Kauffman állapota van.

Minden Kauffman állapothoz két értéket rendelünk, a következő szabály szerint: egy c_i kereszteződésnél legyen $s(\sigma(c_i))$ a Kauffman állapot által c_i -nél elfoglalt tartományba az 1.8 rajzon megadott érték, és definiáljuk $d(\sigma(c_i))$ -t hasonlóan. Ekkor

$$s(\sigma) = \sum_{c_i \in Cr(D)} s(\sigma(c_i)), \quad d(\sigma) = \sum_{c_i \in Cr(D)} d(\sigma(c_i)).$$



1.9 ábra: Az első két Reidemeister mozgástól való függetlenség

1.3.4 definíció. Legyen D egy adott K csomó diagramja. A

$$\Delta_K(t) = \sum_{\sigma \in Ks(D)} (-1)^{d(\sigma)} \cdot t^{s(\sigma)} \in \mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$$

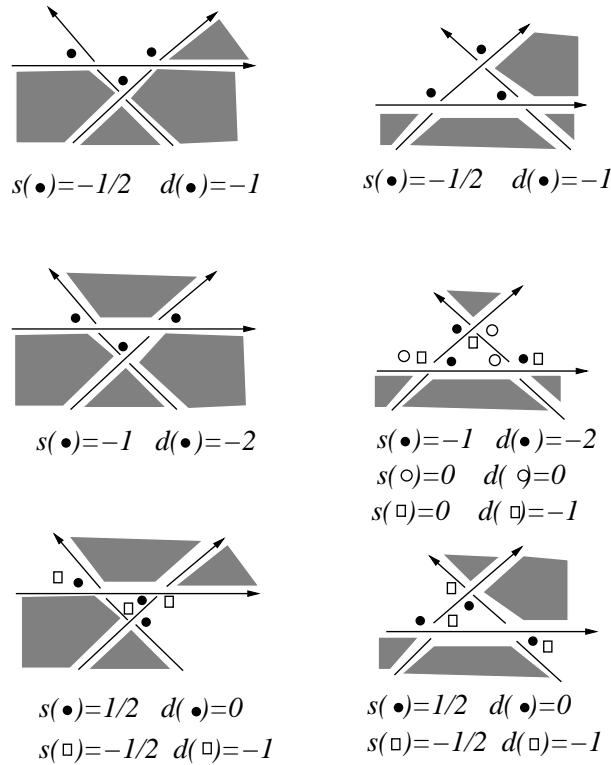
Laurent polinom a csomó *Alexander polinomja*.

1.3.5 tétel. Az *Alexander polinom* a csomó egy *invariánsa*, vagyis nem függ a diagram, és az azon kijelölt él választásától.

Bizonyítás A diagram választásától való függetlenséget természetesen úgy fogjuk belátni, hogy megmutatjuk, a polinom nem változik Reidemeister mozgások alkalmazása esetén. Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor a megjelölt él a Reidemeister mozgásban résztvevő kis körlap-beli éleken kívül van. Az első Reidemeister mozgás esetén a kis tartományban egyetlen kereszteződés van, így ott a Kauffman állapot mindig ugyanaz, és ennek hozzájárulása s -hez és d -hez is nulla, így bevezetése vagy elhagyása nem változtat a polinom értékén.

A második Reidemeister mozgás esetén, a mozgás eredményeként előálló diagramban (az 1.9 ábrán) az állapotokat két csoportba oszthatjuk, attó függően, hogy a kis bigonon kívüli jel a bigon függőleges tengelyén (tehát 'szimmetrikusan'), vagy attó jobbra/balra (tehát 'aszimmetrikusan') helyezkedik el. Az első típusú állapotok megfelelnek a mozgás előtti diagram állapotainak, és mivel a két pont hozzájárulása ekkor kioltja egymást, az ilyen állapotok s - és d -értékei nem változnak. A további állapotok pedig az ábrán mutatott módon párba állíthatóak, és a párokon belül az s -értékek megegyeznek, míg a d -értékek eggyel különböznek, így az összegben ezek a tagok egymást ki fogják ejteni. (Az ábrán egy rögzített irányítás esetét rajzoltuk le, a többi eset is hasonlóan működik.)

A harmadik mozgás esetében valamivel több esetet kell megnézni. A lokális képen hét tartomány és három csúcs szerepel, így négy tartomány 'kívülről' kapja az állapotát. Ez a négy tartomány vagy egymás melletti, vagy három egymás melletti és a negyedik nem érintkezik velük, vagy 2-2 megoszlásban érintkeznek. Az első esetben a mozgás előtt és után is csak egyféle állapot írható a lokális képbe, és ennek hozzájárulása a mozgás során nem változik. A második esetben egy illetve három lehetőség van, de a háromból kettő kiejti egymást az összegben. Az utolsó esetben két-két lehetőséget kell összehasonlítanunk, melyek s - és d -értékei párban állnak, így az állapotok s - és d -értékei is megfelelnek egymásnak. Az 1.10 ábrán ismét egy irányításválasztás látható, a többi eset is hasonlóan intézhető el.



1.10 ábra: A harmadik Reidemeister mozgástól való függetlenség

Következő lépésként megmutatjuk, hogy a kitüntetett pont választásától a válasz független. Ehhez pusztán egy kereszteződésen kell a pontot 'átjuttatni'. A diagramot az S^2 gömbfelületen tekintve, a kereszteződést tegyük éppen a végtelen távoli pontba. A kijelölt pontot nem tartalmazó szálat a két irányba mozdítva, majd az egyiken olyan Reidemeister mozgásokat végezve, amikor a kijelölt pont 'távol' van, épp a kívánt két ábrát kapjuk.

Végül ha a kijelölt pont a tervezett Reidemeister mozgás közelében van, először az előbbieket alapján vigyük messze, végezzük el a Reidemeister mozgást, majd vigyük a kijelölt pontot vissza. Ez utolsó észrevétel a bizonyítást be is fejezi. \square

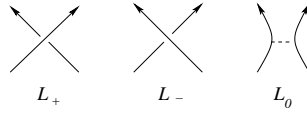
- 1.3.6 feladatok.** (a) Számítsuk ki a $T(2, 2n + 1)$ tórikus csomók Alexander polinomját.
(b) Hasonlítsuk össze a bal- és jobbkezes háromlevelű csomó Alexander polinomját.

A következő tételt bizonyítás nélkül közöljük:

1.3.7 tétel. Legyen $K \subset S^3$ egy adott csomó. Ekkor

- $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$;
- $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$, vagyis $\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i(t^i + t^{-i})$ ($a_n \neq 0$);
- $g(K) \leq n$;
- Ha K -nak van alternáló diagramja (vagyis egy olyan diagramja, melyen körbehaladva az alul- és felülkereszteződések váltakozva fordulnak elő), akkor $n = g(K)$. \square

1.3.8 feladat. A fenti tételt alkalmazva határozzuk meg a $T(2, 2n + 1)$ tórikus csomó génuszát.



1.11 ábra: A bogozási relációban résztvevő vetületek. (Az L_0 vetületben szereplő szaggatott szakasz a reláció bizonyításában játszik majd szerepet.)

1.4 A bogozási reláció

A fentiekben az Alexander polinomot csak csomókra definiáltuk. Legyen tehát L egy esetleg több komponensű lánc. Ha a láncnak van nem összefüggő vetülete, akkor definiáljuk a polinomot 0-nak, egyébként vegyük L egy (összefüggő) vetületét, és erre ismétljük el a csomókra tanult definíciót. (A Reidemeister mozgásokra való invariancia ugyanúgy működik, a pont mozgatása azonban nem, hiszen nem tudunk egyik komponensről a másikra átlépni. A pont választásától való függetlenség éppen a bogozási relációból fog következni.)

1.4.1 tétel. *Legyen L_+, L_-, L_0 három olyan (irányított) lánc, melyeknek egy rögzített projekciójára teljesül az, hogy egy kis körlapon kívül megegyeznek, a körlapon belül pedig az 1.11 ábra szerint néznek ki. Ekkor a megfelelő Alexander polinomokra*

$$\Delta_{L_+} - \Delta_{L_-} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{L_0}$$

teljesül.

Proof. Tegyük fel, hogy L_0 minden vetülete összefüggő, és tekintsük az adott vetületet. Vegyük ennek a diagramnak egy Kauffman állapotát. Ekkor a szaggatott szakaszt tartalmazó tartományban a Kauffman állapot a tartománynak vagy a szakasz feletti, vagy a szakasz alatti egyik kereszteződésénél van. Illy módon L_+ -ban és L_- -ban az új kereszteződésben egyetlen választásunk van arra, hogy az L_0 -beli adott Kauffman állapotot kiterjesszük. Az állapotok értékét kiszámítva azt látjuk, hogy az L_+ -beliből az L_- -belit levonva az L_0 -beli $(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$ -szeresét kapjuk.

A fentiekben minden L_0 -beli állapotot számbavettünk, de nem minden L_+ - és L_- -belit. Ezek nyilván meghatározzák egymást, és csak azokat kell még megvizsgálni, amikor az új kereszteződésnél a jel oldalt van. Ezekre az állapotokra az s és d értékek azonban könnyen láthatóan megegyeznek, így a különbségben kiesnek. \square

Valójában a bogozási reláció és a $\Delta_U = 1$ normálás (ahol U a triviális csomó) meghatározza az Alexander polinomot. Ez a tény abból következik, hogy alkalmas bogozási relációban két csomó 'egyszerűbbnek' választható, mint a harmadik: az egyiknek a kereszteződés-száma kisebb, míg a másikat kevesebb kereszteződés-cserével lehet kicsomózni. (Ehhez meg kell gondolni azt, hogy minden csomó kicsomózható véges sok kereszteződés-cserével: induljunk el egy csomón és érzük el azt, hogy mindig a felső íven megyünk, mindaddig míg vissza nem érünk egy olyan kereszteződéshez, amin már egyszer átmentünk — ekkor a hurok lerövidíthető, és a kereszteződések száma így csökkenthető.)

1.4.2 feladat. Lássuk be, hogy egy kétkomponensű lánc Alexander polinomja nem függ a kitüntetett ív választásától. (Használjuk a bogozási relációt és a hasonló tételt csomókra.) Indukcióval lássuk be ezt az állítást tetszőleges láncra.

1.5 Kitekintés

Az Alexander polinomot J. W. Alexander definiálta 1928-ban megjelent dolgozatában; a definíció fent közölt átírása L. Kauffman nevéhez fűződik. Sokáig ez a polinom volt csomók egyetlen igazán hatásos invariánsa. 1985 körül V. Jones talált egy másik polinom invariánst (mely már a jobb- és balkezes háromlevelű csomót

is meg tudta különböztetni). Ismét Kauffman fogalmazta át az eredeti definíciót a fentihez nagyon hasonló kombinatorikus formába. Bár olyan K csomót nem nehéz találni, melynek Alexander polinomja a triviális csomó Alexander polinomjával egyezik meg (pl. a $P(-3, 5, 7)$ perccs csomó ilyen), az még ma is nyitott kérdés, hogy van-e olyan csomó, mely nemtriviális, de Jones polinomja a triviális csomó Jones polinomjával egyenlő. A Jones polinom felfedezése után a két polinom közös általánosításaként fedezték fel az ún. HOMFLY polinomot (a hat felfedező neveinek kezdőbetűiből.)

Az elmúlt néhány évben a polinomok ismét reneszánszukat élik: 2000-ben Khovanov egy olyan homológia-elméletet talált, melynek Euler karakterisztikája éppen a Jones polinom. Néhány évvel később Ozsváth és Szabó (Khovanov módszerétől teljesen eltérő módon) egy másik homológia-elméletet talált, mely az Alexander polinomot adja Euler karakterisztikaként. (Napjainkban pedig egy olyan elmélet is megszületett, mely a HOMFLY polinomot adja vissza.) Ezekről az elméletekről belátható (de nem egyszerűen), hogy meghatározzák a triviális csomót, vagyis nemtriviális csomó invariánsa különbözik a triviálisétól.