BME TTK Nemsztenderd Analízis Vizsgakérdések, 2008 ősz

(A) Modellelméleti alapok

1. Ultraszűrő fogalma, létezése, véges halmaz felett minden ultraszűrő fő-ultraszűrő.
2. Struktúrák direkt- és ultraszorzatának definíciója. Łoś-lemma (bizonyítás nélkül).
3. κ-reguláris ultraszűrők és létezésük.
4. Elsőrendben axiomatizálható modellosztályok jellemzése.
5. κ-reguláris ultraszűrők szerinti ultrahatványok számossága.
6. Legfeljebb κ-s nyelvű struktúrák κ-reguláris ultraszűrők szerinti ultrahatványai κ^+-univerzálisak.
7. Diagonális beágyazás, típus, ω feletti nemfő ultraszűrő szerinti ultraszorzat $\aleph_1$-szaturált.
8. ${}^*\mathbf{R}$ definíciója, végtelen nagy és végtelen kicsi mennyiségek ${}^*\mathbf{R}$-ben, "végtelen közel van" egy ekvivalencia-reláció, monád, sztenderd rész.

(B) Nemsztenderd Analízis alapjai; (E)-vel együtt választható

9. Konvergens sorozatok nemsztenderd jellemzése. Sorozatok torlódáspontjainak nemsztenderd jellemzése.
10. Minden korlátos sorozatnak van torlódáspontja, illetve kiválasztható belőle konvergens részsorozat.
11. Ramsey tétele megszámlálhatóan végtelen gráfokra. Ebből: minden sorozatnak van monoton részosorozata, minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.
12. Függvények folytonosságának, határértékének nemsztenderd jellemzése.

(C) Klasszikus Nemsztenderd analízis

13. Nyílt és zárt halmazok nemsztenderd jellemzése. Korlátos zárt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos.
14. Bolzano tétele folytonos függvények gyökeiről.
15. Az összegzés, mint lineáris operátor. Kiesler összegzési tétele. Folytonos függvények végtelen finom integrálközelítő-összegei végtelen közel vannak egymáshoz, és a Riemann-integrál értékéhez is.
16. Newton-Leibniz-tétel.
17. A differenciálszámítás alaptétele (folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja az eredeti függvény).
18. A Cauchy-Peano egzisztencia-tétel.

(D) Polinomok

19. Monomok dominálása: két eltérő fokú monom közül valamelyik dominálja a másikat, sőt, sztenderd r-re az $1/r$-szerese is; $*$-polinomok rendje.
20. Ha egy $*$-polinom rendje véges, akkor annyi véges gyöke van, mint a rendje, ha a rend végtelen, akkor végtelen sok véges gyöke van.
21. Montel tétele.
22. A Hilbert-féle Nullhelytétel: ha $f_1, ..., f_r, g \in \mathbf{C}[x_1, ..., x_n]$ olyan legfeljebb d-edfokú polinomok, hogy g eltűnik $f_1, ..., f_r$ összes közös gyökén, akkor van egy csak n-től és d-től függő m szám, hogy g^m benne van az $f_1, ..., f_r$ által generált ideálban.

(E) Valószínűségi mértékek; (B)-vel együtt választható

23. Számlálómértékek $*$-véges halmazokon. A Loeb-mérték definíciója és kapcsolata a Lebesgue-mértékkel.
24. Nagy számok erős törvényei – sztenderd konstrukciók.
25. Nagy számok erős törvényei – nem-sztenderd konstrukciók.