Nemsztenderd Analízis Feladatok, 1.

1. Legyenek $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(I)$ ultraszűrők. Igazoljuk, hogy
(a) ha $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ akkor $\mathcal{U} = \mathcal{V}$;
(b) ha $x \subseteq I$ és minden $y \in \mathcal{U}$-ra $x \cap y \neq \emptyset$, akkor $x \in \mathcal{U}$;
(c) ha $x, y \subseteq I$ és $x \cup y \in \mathcal{U}$, akkor $x \in \mathcal{U}$ vagy $y \in \mathcal{U}$.

2. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ azonos nyelvű elsőrendű struktúrák, és legyen $\mathcal{F}$ ultraszűrő az I halmazon. Igaz-e, hogy az ${}^I(\mathcal{A} \times \mathcal{B})/\mathcal{F}$ és az $({}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}) \times ({}^I\mathcal{B}/\mathcal{F})$ struktúrák izomorfak? Indokoljunk, vagy mutassunk ellenpéldát.

3. Legyen F egy test és legyen $\mathcal{U}$ egy ultraszűrő az I halmaz felett. Azonosítsuk a diagonális beágyazás szerint (a szokásos módon) F elemeit $G = {}^I F/\mathcal{U}$ megfelelő elemeivel; így G az F bővítése. Igazoljuk, hogy $G \setminus F$ minden eleme transzcendens F felett (azaz, ha $a \in G \setminus F$, akkor a nem gyöke egyetlen F feletti polinomnak sem).

4. Legyen K_1 és K_2 (azonos nyelvű) struktúrák egy-egy axiomatizálható osztálya. Igazoljuk, hogy $K_1 \cup K_2$ is axiomatizálható.

5. Adjunk példát (azonos nyelvű) struktúrák egy olyan osztályára, mely ultraszorzatra (és izomorfizmusra) zárt, de elsőrendben nem axiomatizálható.

2010 február.