Modellelmélet Feladatok, 1.

1. Adjunk meg egy olyan struktúra-osztályt, mely
   (a) zárt elemi ekvivalenciára (és izomorfizmusra), de ultraszorzatra nem;
   (b) zárt ultraszorzatra (és izomorfizmusra) de elemi ekvivalenciára nem.

2. Legyen $m \geq 1$ adott természetes szám. Azt mondjuk, hogy a G csoport m-*reprezentálható*, ha G beágyazható egy alkalmas test feletti nemszinguláris $m \times m$-es mátrixok multiplikatív csoportjába. Igazoljuk, hogy G akkor és csak akkor m-reprezentálható, ha minden végesen generált részcsoportja m-reprezentálható.

3. Legyen F egy test és legyen $\mathcal{U}$ egy ultraszűrő az I halmaz felett. Azonosítsuk a diagonális beágyazás szerint (a szokásos módon) F elemeit $G = {}^I F/\mathcal{U}$ megfelelő elemeivel; így G az F bővítése. Igazoljuk, hogy $G \setminus F$ minden eleme transzcendens F felett.

4. Legyen $\{R_0, R_1, ...,\}$ unáris relációszimbolumok egy megszámlálhatóan végtelen sorozata, és legyen T a következő formulahalmaz:

$$T = \{\exists v(R_{i_0}(v) \wedge ... \wedge R_{i_n}(v) \wedge \neg R_{j_0}(v) \wedge ... \wedge \neg R_{j_m}(v)) : \\ \{i_0, ..., i_n\} \cap \{j_0, ..., j_m\} = \emptyset\}.$$

Igazoljuk, hogy T-nek van szaturált modellje.

5. Emlékeztető: egy $\mathcal{A}$ struktúra κ-szaturált, ha minden $X \in [A]^{<\kappa}$-ra $S_v^{\mathcal{A}}(X)$ minden eleme realizálható. Itt v egyetlen változó. Legyen $\bar{v}_n$ változók egy n-hosszú sorozata ($n \geq 1$ tetszőlegesen rögzitett természetes szám). Igazoljuk, hogy ha κ végtelen, akkor az alábbi két állítás ekvivalens.
   (1) $\mathcal{A}$ egy κ-szaturált struktúra.
   (2) Minden $X \in [A]^{<\kappa}$-ra $S_{\bar{v}_n}^{\mathcal{A}}(X)$ minden eleme realizálható $\mathcal{A}$-ban.

2010 Október.