

Mat. Alapjai ZH 1. csoport
ELTE TTK, 2009 November 13.

1. Formalizáljuk az alábbi két mondatot a következő elsőrendű nyelven:

$A(x) : x$ autó, $T(x) : x$ taxisofoőr,
 $V(x, y) : x$ tudja y -nt vezetni.

„Minden taxisofoőr legalább két különböző autót tud vezetni.”
„Van olyan autó, melyet egyetlen taxisofoőr sem tud vezetni.”

(8 pont)

2. Alkalmos modell megadásával igazoljuk, hogy

$$\{\exists x \forall y (g(y) = f(x, y)), \forall x \forall y (f(x, y) = f(y, x))\} \not\models \forall x \forall y (g(x) = g(y)).$$

(13 pont)

3. A teljességi tétel felhasználása nélkül igazoljuk, hogy ha $\Sigma \cup \{\neg \alpha\} \vdash \beta$ akkor $\Sigma \cup \{\neg \beta\} \vdash \alpha$.

(13 pont)

4. Legyen $A = \{f : \omega \rightarrow \mathbf{Q}, \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0\}$ (\mathbf{Q} a racionális számok halmaza).

Adjunk meg egy injektív függvényt $\mathcal{P}(\omega)$ -ból A -ba.

(13 pont)

5. Legyen A tranzitív halmaz. Igaz-e, hogy $\mathcal{P}(A)$ szintén tranzitív halmaz? Indokoljunk.

(13 pont)

Minden választ indokoljunk !

Mat. Alapjai ZH 2. csoport
ELTE TTK, 2009 November 13.

1. Formalizáljuk az alábbi két mondatot a következő elsőrendű nyelven:

$$A(x) : x \text{ autó}, \quad T(x) : x \text{ taxisofőr}, \\ V(x, y) : x \text{ tudja } y\text{-nt vezetni.}$$

„Ha egy taxisofőr legalább két különböző autót tud vezetni, akkor minden autót tud vezetni.”

„Van olyan taxisofőr, aki legfeljebb egy autót tud vezetni.”

(8 pont)

2. Alkalmos modell megadásával igazoljuk, hogy

$$\{\forall x(P(x) \Rightarrow \exists yR(x, y)), \exists xP(x)\} \not\models \forall x\forall y(R(x, y) \Rightarrow P(x)).$$

(13 pont)

3. A teljességi tétel felhasználása nélkül igazoljuk, hogy ha $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Rightarrow \gamma$ akkor $\Sigma \cup \{\beta\} \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$.

(13 pont)

4. Legyen $A = \{f : \omega \rightarrow \omega, (\forall m)f(m) > m^2\}$. Adjunk meg egy injektív függvényt $\mathcal{P}(\omega)$ -ból A -ba.

(13 pont)

5. Legyen A egy halmaz. Igaz-e, hogy ha $\mathcal{P}(A)$ tranzitív halmaz, akkor A szintén tranzitív halmaz? Indokoljunk.

(13 pont)

Minden választ indokoljunk !