

ELTE TTK Matematika Alapjai Vizsgakérdések, 2009 ősz

(A) Első Logika blokk

1. Nullad- és elsőrendű nyelvek szintaxisa (a nyelvek szimbólumai, formulák, termek).
2. Kiértékelések, struktúrák, a nullad- és elsőrendű formulák jelentése.
3. Formulák ekvivalenciája, szemantikus következmény fogalma.
4. Funkcionális teljesség. Minden nulladrendű formula ekvivalens egy DNF-el ill. KNF-el.
5. Az itéletkalkulus axiómái, következtetési szabálya, a *Ded* operátor lezárási operátor.
6. Dedukciós tétel.
7. Ellentmondásos formulahalmaz fogalma, $\Sigma \vdash \varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos; $\Sigma \vdash \neg\varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\varphi\}$ ellentmondásos. Ellentmondásos formulahalmazból minden levezethető.
8. Helyességi tétel.
9. Teljességi tétel.

(B) Halmazelmélet blokk

10. Halmazok ekvivalenciája (a \sim reláció) és alaptulajdonságai (reflexivitás, szimmetria, tranzitivitás, kompatibilitás).
11. A kiválasztási axióma, injektív és szürjektív függvények létezése közti kapcsolatok, megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.
12. A Bernstein-féle antiszimmetria tétel.
13. A hatványhalmaz fogalma, egyetlen halmaz sem ekvivalens hatványhalmazával, a számosság naív definíciójának ellentmondásossága.
14. A halmazelmélet nyelve, ZFC axiómák. A nyelv bővítése. Az osztály fogalma.
15. Rendezett halmazok, jólrendezések, izomorfia, rendszámok, rendszám elemei rendszámok.
16. A rendszámok rendezése és alaptulajdonságai (irreflexivitás, tranzitivitás, trichotómia, ha egy osztályban van rendszám, akkor van benne legkisebb is).
17. A rendszámok valódi osztályt alkotnak. Limesz, és rákövetkező rendszámok. Limeszrendszám létezése.
18. Transzfinit indukció és helyessége.
19. Transzfinit rekurzió és helyessége.
20. A kiválasztási axióma néhány ekvivalense: minden halmazzal van ekvivalens rendszám, Zorn-lemma.
21. A számosságoperáció definíciója és alaptulajdonságai.
22. Műveletek számosságokkal, és ezek alaptulajdonságai.
23. Disztributivitás. A számosságáritmetika alaptétele (az alaptétel bizonyítás nélkül).
24. Az \aleph operáció. Kontinuum-probléma és kontinuum-hipotézis.

(C) Második Logika Blokk

25. A kompaktsági tétel két alakja.
26. Az elemi ekvivalencia és izomorfizmus fogalma. Ha \mathcal{A} végtelen struktúra, akkor van vele elemien ekvivalens, nem izomorf másik struktúra.
27. Ultraszűrő fogalma, létezése, véges halmaz felett minden ultraszűrő fő-ultraszűrő.
28. Minden véges metszet tulajdonságú halmazrendszer kiterjeszhető szűrővé, minden szűrő kiterjeszhető ultraszűrővé.
29. Struktúrák direkt- és ultraszorzatának definíciója. Łoś-lemma (bizonyítás nélkül).
30. A kompaktsági tétel ultraszorzos bizonyítása.
31. Elsőrendben axiomatizálható modellosztályok jellemzése.