Válogatott Fejezetek a Modellelméletből és Határterületeiből

Sági Gábor*

2005. szeptember 28.

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
1364, Budapest Pf. 127
e-mail: sagi@renyi.hu

Minden visszajelzést szívesen veszek.
1.14. Verzió.

*A jegyzet a D042177 számú OTKA pályázat és a BME TTK Matematika Doktori Iskola támogatásával készül(t).

Előszó

A modellelmélet a matematikai logika egyik ága. E jegyzettel az a célunk, hogy bemutassuk a modellelmélet néhány klasszikus és modern fejezetét. A klasszikus részekre építve eljutunk egy-egy jelenleg is aktív kutatási terület feldolgozásáig.

Ez a jegyzet nem monográfia: nem az a célunk, hogy sorra vegyük a modellelmélet minden fontos területét–ez terjedelmi okok miatt is lehetetlen lenne. Még csak arra sem vállalkozunk, hogy egy szűkebb területre koncentrálva az adott területről teljes képet adjunk. Ugyanakkor a bizonyítások, konstrukciók, magyarázatok a monográfiáknál jóval bővebben kerültek kifejtésre, így a szöveg inkább a tankönyvek, egyetemi jegyzetek stílusára emlékeztet. Valóban, szándékunk szerint egy felsőbbéves – a téma iránt érdeklődő – egyetemi hallgató, aki tanult már logikát, akár önállóan is feldolgozhatja a leírtakat. Azonban, mint említettük, több, jelenleg is aktív kutatási területről is képet nyerhet az olvasó.

Szerencsére kitűnő modellelmélet monográfiák készültek (természetesen egyelőre csak idegen nyelveken). Ezekkel kapcsolatban az irodalomjegyzékre utalunk.

A modellelméletet mára rengeteg kapcsolat fűzi a matematika sok más területéhez, elsősorban az algebrához, kombinatorikához, halmazelmélethez, topológiához. Az ilyen kapcsolatok kétirányúak: egyrészt a modellelmélet felhasználja az előbbi területek eredményeit, másrészt rendkívül erős módszereket nyújt, melyek tisztán algebrai, kombinatorikai, stb. problémák megoldásában sikeresen alkalmazhatók.

A jegyzet néhány központi tétel köré szerveződik, a modellelméleti eredményeket úgy építjük ki, hogy ezeket a központi tételeket be tudjuk bizonyítani. A felépített apparátus meglepően koherens egységet alkot, melyből sok olyan eredmény is levezethető, melyekre nem térünk ki. Nem mindig térünk ki az adott területen ismert legerősebb tételek bizonyítására: helyenként megelégszünk azoknak a speciális eseteknek a bizonyításával, melyekre később e jegyzetben szükségünk lesz. Mindenképp így járunk el, ha távoli területek közti szép összefüggéseket, vagy egy-egy különösen szellemes, elegáns bizonyítást akarunk bemutatni.

Kitérünk viszont olyan alkalmazásokra, melyek nem a későbbi modellelméleti tételekhez szükségesek, hanem azt illusztrálják, hogy modellelméleti technikákkal hogyan lehet más területek problémáit megoldani. Reményeink szerint az ilyen alkalmazásokat a nem modellelmélet-specialisták is szórakoztatónak, szellemesnek és érdekesnek találják majd. Egy kis ízelítő az alkalmazásokból: tételek a Ramsey-elméletből, véletlen struktúrák aszimptotikus tulajdonságai, oligomorf permutációcsoportok konstrukciói, simán approximálható permutációcsoportok és véges axiomatizálhatóság, néhány kapcsolat bizonyos kombinatorikus geometria (matroid) és modellelméleti kérdések között.

Az egyes fejezetek elején bő motivációt adunk a vizsgált kérdésekhez és igyekszünk megemlíteni a további kapcsolatokat más területekkel. Itt mindössze azt jegyezzük meg, hogy a bevezetésben arra törekszünk, hogy amennyire csak lehetséges, a szöveg legyen önmagyarázó, azaz a később felhasznált logikai, modellelméleti tételek bizonyításait részletesen felidézzük, tehát csak annyit tételezünk fel az olvasóról, hogy egy bevezető matematikai logika kurzust sikeresen elvégzett már. A későbbi fejezetek természetesen messze túlmutatnak az egyetemi képzésben jelenleg (bármilyen formában) ismertetésre kerülő anyagon.

A jegyzet nagyrészét A Középeurópai Egyetem (CEU) és a Rényi Intézet közös matematika doktori iskoláján, a BME matematika doktori iskoláján, illetve az ELTE TTK-n és a BME-n felsőbbéves matematikus hallgatók számára meghírdetett speciken, különböző kurzusokon többször előadtam, és sok értékes visszajelzést kaptam hallgatóimtól. E jegyzet korábbi változatainak bizonyos részeit 2004 őszén az ELTE TTK-n tartott modellelmélet speci hallgatói szintén átolvasták és sok hibára, pontatlanságra hívták fel a figyelmemet. Különösen hasznos visszajelzéseket kaptam (névsor szerint) a következő ELTE TTK-s hallgatóktól, doktoranduszoktól: Hamar Gergő, Horváth Gábor, Keszegh Balázs, Végh László. Munkájuknak köszönhetően a szöveg sokat javult. Kitartásukat, a téma iránti nyitottságukat és segítségüket ezúton is nagyon köszönöm.

Természetesen, minden, a szövegben maradt hibáért, tévedésért egyedül és kizárólag én vagyok a felelős; a hibákért ezúton kérek elnézést minden olvasótól. Végül azt kívánom mindenkinek, hogy olyan örömmel olvassák a jegyzet hátralevő részét, amilyen örömmel én írtam.

Sági Gábor

Tartalomjegyzék

1. Előismeretek

Ebben a fejezetben összefoglaljuk azokat a definíciókat, tételeket és módszereket melyekről feltételezzük, hogy ismertek már az olvasó előtt. Ezzel az ismétléssel az a célunk, hogy a definíciók és tételek puszta felsorolásán túl olyan könnyen olvasható és viszonylag teljes bevezetést adjunk, mely az egész jegyzetet önmagyarázóvá teszi abban az értelemben, hogy egy matematikailag kellően érett olvasó további könyvek, monográfiák tanulmányozása nélkül is tökéletesen birtokolja az anyagot.

Ugyanakkor, mivel feltételezzük a fejezet anyagának ismeretét, sok esetben a részletek elmagyarázása helyett csak emlékeztetünk bizonyos tényekre. Továbbá ebben a fejezetben nem törekszünk lineáris felépítésre: például a halmazelméleti ismeretek összefoglalása során használjuk majd az elsőrendű nyelvek fogalmát. Az aggályos olvasó a fejezet bekezdéseinek alkalmas permutálásával meggyőződhet róla, hogy az itt felidézett tényekben nincs ördögi kör, azaz a gondolatok széttördelése árán el lehetne érni egy teljesen lineáris felépítést, melyben a hivatkozások mindig korábbi szövegrészekre történnek.

1.1. Halmazelmélet

A modellelméletben más matematikai diszciplinákhoz képest hangsúlyosabb szerephez jut az axiomatikus halmazelmélet. A jegyzetben végig a ZFC axiómarendszert használjuk. Ebben a részben semmit nem bizonyítunk. Minden idézett állítás bizonyítással együtt megtalálható például [6]-ban.

Feltételezzük, hogy az olvasó tisztában van a rendszám és a számosság fogalmával. Emlékeztetünk rá, hogy a rendszámok és számosságok maguk is halmazok, az összes rendszám valódi osztályt alkot, melyet az $\in$ reláció jólrendez. A rendszámokkal a „hányadik” fogalmát tudjuk transzfinit módon kiterjeszteni:

- minden α rendszámnak van rákövetkezője (azaz olyan α-nál nagyobb β rendszám, hogy α és β között további rendszámok már nincsenek) és
- rendszámok tetszőleges halmazának van legkisebb felső korlátja.

Ez a két tulajdonság karakterizálja is a rendszámokat. Minden rendszámot azonosítani fogunk a nála kisebb rendszámok halmazával. Ha egy rendszámra igaz, hogy a nála kisebb rendszámok között van legnagyobb, akkor az illető rendszámot rákövetkező rendszámnak nevezzük. A $\emptyset$-tól különböző nem rákövetkező rendszámokat limeszrendszámoknak hívjuk. A legkisebb limeszrendszám ω, ezt a korábbi megállapodásunk értelmében a természetes számok (azaz a véges rendszámok) halmazával azonosítjuk.

Két halmaz ekvivalens, ha megadható köztük egy bijekció. A számosságok azok a rendszámok, melyek egyetlen náluk kisebb rendszámmal sem ekvivalensek. A κ számosság kisebb a λ számosságnál, ha mint rendszámok ilyen viszonyban vannak.

Minden A halmaz ekvivalens egy számossággal, ezt a számosságot hívjuk A számosságának, és így jelöljük: $|A|$. Két halmaznak tehát pontosan akkor azonos a számossága, ha van köztük bijekció. A számosságok a „mennyi” fogalmának a transzfinit általánosításai. A számosságok szintén valódi osztályt alkotnak. A κ számosság rákövetkező, ha a nála kisebb számosságok között van legnagyobb. Minden λ számosságnak van rákövetkező számossága, ezt λ^+-al jelöljük.

Operációkat a következő módon adhatunk meg. Felveszünk véges sok, mondjuk n darab (paraméter)halmazt, és egy elsőrendű $\varphi(x, y, v_0, ..., v_{n-1})$ formulát a halmazelmélet nyelvén. Ezek után megmutatjuk, hogy minden a halmazhoz pontosan egy b halmaz van, melyre $\varphi(a, b, p_0, ..., p_{n-1})$ fennáll. Ezzel körülírtunk egy megfeleltetést, mely minden x halmazhoz pontosan egy y-t társít. Végül e megfeleltetésnek nevet adunk. Ha $\mathcal{F}$ egy operáció és X egy halmaz, akkor $\mathcal{F}|_X$ az a függvény, mely X-n van értelmezve, és értékei $\mathcal{F}$ megfelelő értékeivel azonosak. Az $\mathcal{F}|_X$ függvény maga is egy halmaz. Sokszor egy-egy operációt csak rendszámokon adunk meg. Minden ilyen definíciót kiegészíthetünk úgy, hogy az illető operáció a nem-rendszámokon például mindig az $\emptyset$ értéket vegye fel. Az ilyen részleteket nagyvonalúan fogjuk kezelni, és néha minden további figyelmeztetés nélkül úgy fogalmazunk, mintha operációink kizárólag rendszámokon lennének értelmezve. Feltételezzük, hogy az olvasó gyakorlott már annyira, hogy ez semmilyen félreértést nem eredményez.

Legyenek most $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ operációk. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{G}$ transzfinit rekurzióval keletkezik $\mathcal{F}$-ből, ha minden α rendszámra teljesül, hogy

$$\mathcal{G}(\alpha) = \mathcal{F}(\mathcal{G}|_\alpha),$$

vagyis, ha a $\mathcal{G}$ operáció α-nál felvett értéke „$\mathcal{F}$ módon függ" $\mathcal{G}$ összes, α-nál kisebb rendszámokon felvett értékétől.

Minden $\mathcal{F}$ operációhoz pontosan egy olyan (rendszámokon értelmezett) operáció van, mely transzfinit rekurzióval keletkezik $\mathcal{F}$-ből.

$\aleph_0 = |\omega|$ a legkisebb végtelen számosság; tetszőleges α rendszámra transzfinit rekurzióval definiálhatjuk $\aleph_\alpha$-t: ez a legkisebb olyan végtelen számosság, mely az $\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ halmaz egyetlen elemével sem ekvivalens.

A transzfinit indukció elve szerint, ha a halmazelmélet egy $\varphi(v)$ (paraméteres) formulájára teljesül, hogy

$$\text{minden } \alpha \text{ rendszámra } [(\forall \beta < \alpha)\varphi(\beta)] \Rightarrow \varphi(\alpha),$$

akkor $\varphi(\alpha)$ minden α rendszámra igaz.

Legyen $A = \langle \kappa_\gamma : \gamma \in \Gamma \rangle$ számosságok egy rendszere. Ekkor $\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\kappa_\gamma$ az A elemeiből képzett diszjunkt unió számossága; a $\Pi_{\gamma\in\Gamma}\kappa_\gamma$ számosságszorzat pedig a $\Pi_{\gamma\in\Gamma}\kappa_\gamma$ direktszorzat számossága.

Ha A és B halmazok, akkor ${}^A B$ jelöli azoknak a B-be képező függvényeknek a halmazát, melyeknek A az értelmezési tartománya. Ha κ és λ számosságok, akkor a κ^λ számossághatvány egyenlő $|{}^\lambda\kappa|$-val. Ha A halmaz, akkor $\mathcal{P}(A)$ jelöli A hatványhlamazát, tehát azt a halmazt, melynek elemei A részhalmazai. Egy f függvény értelmezési tartományát és értékkészletét rendre $dom(f)$ és $range(f)$ jelöli.

Feltételezzük a számosságaritmetika alapjainak ismeretét. Speciálisan a számosságaritmetika alaptétele szerint ha κ végtelen számosság, akkor $\kappa = \kappa^2$. Továbbá minden A halmazra $|A| < |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. Emlékeztetünk rá, hogy a kontinuum-hipotézis szerint $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ és az általánosított kontinuum-hipotézis szerint minden végtelen κ számosságra $2^\kappa = \kappa^+$; mindkét állítás független ZFC-től, tehát a szokásos halmazelméletben nem bizonyíthatók de nem is cáfolhatók. Néhány esetben az (általánosított) kontinuum-hipotézis feltételezése mellett igazolunk tételeket. Ezek az eredmények természetesen gyengébbek, mintha csak a ZFC axiómákat használnánk. Annyit viszont ezek az eredmények is mutatnak, hogy (ha ZFC ellentmondásmentes, akkor) a szóbanforgó állítást ZFC-ben nem lehet cáfolni.

Legyen A (részben)rendezett halmaz és legyen $B \subseteq A$. azt mondjuk, hogy B kofinális A-ban, ha minden $x \in A$-hoz van olyan $y \in B$, hogy A rendezése szerint $x \leq y$. A kofinalitása az a legkisebb rendszám, melyen megadható olyan függvény, melynek értékkészlete kofinális A-ban. Ha A részbenrendezett halmaz, akkor $cf(A)$ jelöli A kofinalitását.

A rendszámok (mint a kisebb rendszámok halmazai) maguk is rendezett halmazok; egy rendszámot regulárisnak nevezünk, ha kofinalitása egyenlő sajátmagával. Ha κ végtelen rákövetkező számosság, akkor κ reguláris rendszám. A kofinalitás operáció értékei olyan számosságok, melyek egyúttal reguláris rendszámok is.

1.2. Elsőrendű nyelvek és struktúrák

Ebben a részben felidézzük az elsőrendű logika nyelveivel és az elsőrendű struktúrákkal kapcsolatos alapismereteket. Kitérünk az izomorfizmus, elemi ekvivalencia fogalmára, az elsőrendű és magasabbrendű formulák osztályozására, a formulák jelentésére és bevezetjük a A Mod és Th operációkat.

Az elsőrendű nyelvek egy változtatható és egy nem változtatható részből állnak. A nem változtatható részben szerepelnek a logikai műveletek jelei, a kvantorok, az individuumváltozók, stb. A változtatható részben meg kell adnunk, hogy mik az egyes relációszimbólumok és függvényszimbólumok nevei, és hogy ezek hány változósak. Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, hogy megadunk egy függvényt, mely a relációszimbólumok és függvényszimbólumok diszjunk halmazainak unióján van értelmezve és eredményül természetes számokat vesz fel. Az ilyen függvényeket a függvényszimbólumok halmazának megadásával együtt a szóbanforgó elsőrendű nyelvek *típusainak* nevezzük. Egy elsőrendű nyelv megadásán típusának rögzítését értjük. 0-változós függvényszimbólumokat is megengedünk, ezeket konstansszimbólumoknak nevezzük majd.

Hogy a valóság egy szeletének leírására, formalizálására milyen típusú nyelvet választunk, az egy sor önkényes döntés eredménye. Ezek a döntések többek között attól függnek, hogy a vizsgált terület „érdekes” vagy „tipikus” kérdéseit hogyan „könnyű” vagy „természetes” kifejezni, illetve, hogy a formalizálással mi a célunk.

Most felidézzük az elsőrendű nyelvek szintaxisának és szemantikájának definicióját.

1.1. Definíció. *Legyen L az az elsőrendű nyelv, melynek típusa τ, és függvényszimbólumainak halmaza F. Ekkor*
(1) *Ha v_i individuumváltozó, akkor term;*
(2) *Ha $f \in F$ és $t_0, ..., t_{\tau(f)-1}$ term, akkor $f(t_0, ..., t_{\tau(f)-1})$ is term;*
(3) *Minden term az előző két szabály véges sokszori alkalmazásával áll elő.*

(4) *Ha t_0, t_1 két term, akkor $t_0 = t_1$ formula;*
(5) *Ha $R \in dom(\tau) - F$ és $t_0, ..., t_{\tau(R)-1}$ termek akkor $R(t_0, ..., t_{\tau(R)-1})$ formula;*
(6) *Ha φ és ψ formulák, akkor $\neg\varphi$ és $\varphi \wedge \psi$ formulák;*
(7) *Ha φ formula és v_i változó, akkor $\exists v_i \varphi$ formula;*
(8) *Minden formula a $(4) - (7)$ szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.*
L formuláinak halmazát $Form(L)$-el jelöljük.

A $(4) - (5)$ szabály szerint előálló formulákat atomi formuláknak nevezzük, a $(4) - (6)$ szabályok véges sokszori alkalmazásával előállókat pedig kvantormentes formuláknak nevezzük.

Az előbbi definíció szerint az elsőrendű nyelvek kifejezései (termjei és formulái) bizonyos véges szimbólumsorozatok, melyeknek önmagukban nincs semmilyen jelentése. Szándékunk szerint a termek „objektumkonstrukciók", a formulák „állítások" leírására szolgálnak. Mivel azonban az előző definícióban elvonatkoztattunk minden jelentéstől, ezt most definiálnunk kell. A termeknek, formuláknak azáltal lesz jelentésük, hogy megfelelő környezetbe, kontextusba helyezzük őket. Matematikai szempontból egy-egy ilyen kontextus egy elsőrendű struktúra.

1.2. Definíció. *Az $\mathcal{A} = \langle A, f_i^{\mathcal{A}}, R_j^{\mathcal{A}} \rangle_{i \in I, j \in J}$ rendszert elsőrendű struktúrának nevezzük, ha*
- *A nemüres halmaz;*
- *Minden $i \in I$-re $f_i^{\mathcal{A}}$ egy $\tau(f_i^{\mathcal{A}})$ változós függvény A-n;*
- *Minden $j \in J$-re $R_j^{\mathcal{A}}$ egy $\tau(R_j^{\mathcal{A}})$ változós reláció A-n.*

A τ függvényt $\mathcal{A}$ típusának nevezzük.

Egyes szerzők modellnek nevezik az olyan struktúrákat, melyekben a függvények I halmaza üres. Mi ezt a terminológiát NEM követjük; a jegyzetben végig a „struktúra" és „modell" szavakat egymás szinonímájaként használjuk majd. Ha az L elsőrendű nyelv és az $\mathcal{A}$ struktúra típusa megegyezik, akkor röviden azt mondjuk majd, hogy $\mathcal{A}$ egy L-struktúra.

Mint az előbbi definícióban is, a struktúrákat írott betűkkel, alaphalmazaikat mindig a megfelelő latin nagybetűvel jelöljük majd.

Struktúrákra példák a (fél)csoportok, gyűrűk, hálók, Boole-algebrák, részbenrendezett halmazok, gráfok, stb.

Most megadjuk a termek és formulák jelentését egy-egy struktúrában.

1.3. Definíció. *Legyen L egy elsőrendű nyelv, legyen V az L nyelv változóinak halmaza és legyen $\mathcal{A}$ egy L-struktúra. A $k : V \to A$ függvényeket a változók (A feletti) kiértékelésének (vagy röviden értékelésnek) nevezzük. Legyen k egy A feletti értékelés és legyen t az L nyelv egy termje. Ekkor*

- *Ha $t = v_i$ individuumváltozó, akkor $t^{\mathcal{A}}[k] = k(v_i)$;*
- *Ha $t = f(t_0, ..., t_{n-1})$, akkor $t^{\mathcal{A}}[k] = f^{\mathcal{A}}(t_0^{\mathcal{A}}[k], ..., t_{n-1}^{\mathcal{A}}[k])$.*

A következő lépés, hogy definiáljuk a „φ formula igaz az $\mathcal{A}$ struktúrában a k értékelés mellett" relációt, melyet majd így fogunk jelölni: „$\mathcal{A} \models \varphi[k]$". Figyeljük meg, hogy ez a viszony 3 dologtól (formulától, struktúrától és értékeléstől) függ.

Ha k és k' két értékelés, v pedig egy változó, akkor $k \overset{v}{\equiv} k'$ azt jelöli, hogy a két értékelés minden változón ugyanazt az értéket veszi fel, esetleg v kivételével. Az alábbi definícióban minden relációszimbólum, term és formula az adott struktúra nyelvén van felírva.

1.4. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy struktúra és legyen k egy A feletti értékelés. Ekkor*

- *$\mathcal{A} \models t_0 = t_1[k]$ akkor és csak akkor, ha $t_0^{\mathcal{A}}[k] = t_1^{\mathcal{A}}[k]$;*
- *$\mathcal{A} \models R(t_0, ..., t_{n-1})[k]$ akkor és csak akkor, ha $\langle t_0^{\mathcal{A}}[k], ..., t_{n-1}^{\mathcal{A}}[k]\rangle \in R^{\mathcal{A}}$;*
- *$\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi[k]$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A} \models \varphi[k]$ és $\mathcal{A} \models \psi[k]$;*
- *$\mathcal{A} \models \neg\varphi[k]$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A} \not\models \varphi[k]$;*
- *$\mathcal{A} \models \exists v_i \varphi[k]$ akkor és csak akkor, ha van olyan $k' \overset{v_i}{\equiv} k$ értékelés A felett, melyre $\mathcal{A} \models \varphi[k']$.*

$\mathcal{A} \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha minden A feletti k értékelésre $\mathcal{A} \models \varphi[k]$. Legyen Σ formulahalmaz. $\mathcal{A} \models \Sigma$ akkor és csak akkor, ha minden $\varphi \in \Sigma$-ra $\mathcal{A} \models \varphi$.

Állapodjunk meg abban, hogy a „$\varphi \vee \psi$" szimbólumsorozat a „$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$" szimbólumsorozatot rövidíti. Hasonlóan, „$\varphi \Rightarrow \psi$" és „$\forall v_i \varphi$" rendre a „$\neg\varphi \vee \psi$" és a „$\neg\exists v_i \neg\varphi$" szimbólumsorozatok rövidítései. Az előbbi igazságdefiníció alapján ezek a rövidítések valóban azt jelentik, amit a bennük használt jelek sugallnak. Azért célszerű ezeket utólag, jelölésként bevezetni, mert így az elsőrendű formuláknak kevesebb képzési szabálya van, és ha egy állítást a formulák összetettsége szerinti indukcióval akarunk majd igazolni, akkor kevesebb esetet kell csak meggondolni – tehát rövidülnek a bizonyítások.

Két formula azonos jelentésű (ekvivalens), ha minden, a közös nyelvüknek megfelelő $\mathcal{A}$ struktúrában és minden A feletti értékelés mellett egyszerre igazak vagy hamisak. Feltételezzük, hogy az olvasó ismer már jónéhány ekvivalens formulapárt, és biztonsággal alakít formulákat ekvivalens, de áttekinthetőbb formulákká.

1.5. Definíció. *A φ formula prenex alakú, ha $\varphi = Q_0 v_0 ... Q_{n-1} v_{n-1} \psi$, ahol mindegyik Q_i egy kvantor (azaz a $\exists$ vagy a $\forall$ szimbólum) és ψ kvantormentes formula. Ha mindegyik Q_i univerzális kvantor, akkor φ-t univerzális formulának nevezzük, ha* *mindegyik Q_i egzisztenciális kvantor, akkor φ-t egzisztenciális formulának nevezzük. Ha az első néhány (esetleg 0) kvantor univerzális, és ezután csupa (esetleg 0 darab) egzisztenciális kvantor következik φ elején, akkor φ-t $\forall\exists$-formulának nevezzük.*

Minden formula ekvivalens egy prenex alakú formulával. Ezt a tényt ismertnek tételezzük fel, itt nem bizonyítjuk. Feltételezzük továbbá, hogy az olvasó tudja, mit jelent az, hogy egy változó valamely előfordulása szabad illetve kötött.

A következő definíciót szintén ismertnek tételezzük fel, csak alapvető fontossága és a teljesség kedvéért ismételjük itt meg.

1.6. Definíció. *Legyen Σ formulahalmaz, K modellosztály és φ egy formula. $K \models \varphi$ azt jelenti, hogy minden $\mathcal{A} \in K$-ra $\mathcal{A} \models \varphi$ (azaz φ igaz K minden elemében).*

- $Mod(\Sigma) = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \models \Sigma\}$ *a Σ modelljeinek osztálya;*
- $Th(K) = \{\varphi : K \models \varphi\}$ *a K elmélete.*

Σ-ból következik φ (jelekben $\Sigma \models \varphi$) ha minden $\mathcal{A}$ struktúrára teljesül, hogy $\mathcal{A} \models \Sigma$ esetén $\mathcal{A} \models \varphi$ is fennáll. Ha $\Sigma = \emptyset$, akkor nem írjuk ki.

Ha két formula jelentése azonos (vagyis ekvivalensek), akkor nincs köztük lényegi különbség. Mikor azonosíthatunk két struktúrát? Erre ad választ a következő definíció.

1.7. Definíció. *Az azonos τ típusú $\mathcal{A} = \langle A, g_i^{\mathcal{A}}, R_j^{\mathcal{A}}\rangle_{i\in I, j\in J}$ és $\mathcal{B} = \langle B, g_i^{\mathcal{B}}, R_j^{\mathcal{B}}\rangle_{i\in I, j\in J}$ struktúrák izomorfak, ha van olyan $f : A \to B$ bijekció, melyre teljesül, hogy minden $i \in I$-re és $j \in J$-re*

- *ha* $a_0, ..., a_{\tau(g_i)-1} \in A$ *akkor* $f(g_i^{\mathcal{A}}(a_0, ..., a_{\tau(g_i)-1})) = g_i^{\mathcal{B}}(f(a_0), ..., f(a_{\tau(g_i)-1}))$ *és*
- *ha* $a_0, ..., a_{\tau(R_j)-1} \in A$ *akkor* $\langle a_0, ..., a_{\tau(R_j)-1}\rangle \in R_j^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle f(a_0), ..., f(a_{\tau(R_j)-1})\rangle \in R_j^{\mathcal{B}}$.

f-et izomorfizmusnak nevezzük.

Két struktúra tehát pontosan akkor izomorf, ha „szerkezetük" azonos, csak az elemeik konkrét alakjában lehetnek eltérések.

1.8. Definíció. *Az azonos típusú $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák elemien ekvivalensek (jelekben $\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B}$) ha $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$.*

Két struktúra tehát akkor és csak akkor elemien ekvivalens, ha minden elsőrendben kifejezhető tulajdonságuk azonos, vagyis, ha a közös nyelvük szintjén nem tudjuk megkülönböztetni őket.

Nyilvánvalóan vannak elemien ekvivalens, de nem izomorf struktúrapárok: rögzítsünk ugyanis tetszőleges módon egy elsőrendű nyelvet. Legyen e nyelv formulahalmazának számossága κ. Mivel a struktúrák elméletei formulahalmazok, ezért a nyelvhez tartozó struktúráknak legfeljebb 2^κ féle elmélete lehet. Vegyünk most fel 2^κ-nál több struktúrát úgy, hogy alaphalmazaik páronként különböző számosságúak legyenek. Ekkor ezek a struktúrák páronként nem izomorfak. De a skatulya elv miatt lesz köztük kettő, melyeknek azonos az elmélete, vagyis melyek elemien ekvivalensek.

Később látni fogjuk, hogy a helyzet még rosszabb: a végtelen alaphalmazú struktúrák izomorfizmus erejéig elsőrendben leírhatatlanok: minden végtelen struktúrához van vele nem izomorf, de elemien ekvivalens másik struktúra.

Az viszont könnyen adódik, hogy izomorf struktúrapárok elemien ekvivalensek is.

1.9. Tétel. *(1) Ha f egy izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között, akkor minden A feletti k értékelésre és φ formulára teljesül, hogy*

$$(*) \qquad \mathcal{A} \models \varphi[k] \textit{ akkor és csak akkor ha } \mathcal{B} \models \varphi[f \circ k].$$

(2) Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ izomorf struktúrák, akkor elemien ekvivalensek is.

Bizonyítás. Világos, hogy (2) következik (1)-ből: $\varphi \in Th(\mathcal{A})$ akkor és csak akkor teljesül, ha minden A feletti k értékelésre $\mathcal{A} \models \varphi[k]$, de ez (1) szerint pontosan akkor van így, ha minden B feletti k' értékelésre $\mathcal{B} \models \varphi[k']$ (hiszen minden B feletti k' értékelés $f \circ k$ alakú egy alkalmas A feletti k értékeléssel), vagyis ha $\varphi \in Th(\mathcal{B})$. Ezért tehát elég (1)-et igazolni.

(1) igazolásához φ összetettsége szerinti indukciót alkalmazunk. Legyen L a szóbanforgó struktúrák közös nyelve. Először is, egy v individuumváltozóra $f(v[k]) = f(k(v)) = v[f \circ k]$. Továbbá, ha g egy m-változós függvényszimbólum L-ben, akkor $f(g^{\mathcal{A}}[k]) = g^{\mathcal{B}}[f \circ k]$, mert f izomorfizmus. Továbbá, ha $t = h(g_0, ..., g_m)$ az L nyelv egy termje, és tudjuk már, hogy mindegyik g_i-re $f(g_i^{\mathcal{A}}[k]) = g_i^{\mathcal{B}}[f \circ k]$, akkor

$$\begin{aligned}&f(h^{\mathcal{A}}(g_0, ..., g_{m-1})[k]) = h^{\mathcal{B}}(f(g_0^{\mathcal{A}}[k]), ..., f(g_{m-1}^{\mathcal{A}}[k])) = \\ &h^{\mathcal{B}}(g_0^{\mathcal{B}}[f \circ k], ..., g_{m-1}^{\mathcal{B}}[f \circ k]) = h(g_0, ..., g_{m-1})^{\mathcal{B}}[f \circ k].\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy L minden t termjére $f(t^{\mathcal{A}}[k]) = t^{\mathcal{B}}[f \circ k]$. Emiatt, és amiatt, hogy f izomorfizmus, atomi formulákra $(*)$ igaz. Tegyük most fel, hogy $(*)$ igaz a ϕ és ψ formulákra. Ekkor

$$\mathcal{A} \models \neg\phi[k] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \phi[k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \not\models \phi[f \circ k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \neg\phi[f \circ k],$$

vagyis $(*)$ igaz $\neg\phi$-re is. Hasonlóan,

$$\begin{aligned}&\mathcal{A} \models \phi \wedge \psi[k] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \phi[k], \mathcal{A} \models \psi[k] \Leftrightarrow \\ &\mathcal{B} \models \phi[f \circ k], \mathcal{B} \models \psi[f \circ k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \phi \wedge \psi[f \circ k],\end{aligned}$$

vagyis $(*)$ igaz $\phi \wedge \psi$-re is. Végül

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A} \models \exists v\phi[k] & \Leftrightarrow & \text{van } k' \overset{v}{\equiv} k : \ \mathcal{A} \models \phi[k'] \quad \Leftrightarrow \\ \text{van } k' \overset{v}{\equiv} k : \ \mathcal{B} \models \phi[f \circ k'] & \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \exists v\phi[f \circ k], \end{array}$$

azaz $(*)$ $\exists v\phi$-re is igaz. Ezzel beláttuk (1)-et. ∎

1.3. Részstruktúrák, reduktumok

Most felidézünk két egyszerű modellkonstrukciós módszert: a részstruktúra-képzést és a reduktum-képzést. Megmutatjuk majd, hogy univerzális formulák igazsága részstruktúrákra öröklődik. Végül bevezetjük az elemi részstruktúrák fogalmát és igazoljuk a leszálló A Löwenheim-Skolem tételt.

1.10. Definíció. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ L-struktúrák. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ részstruktúrája $\mathcal{B}$-nek, ha $A \subseteq B$ és az $\mathcal{A}$-beli függvények és relációk $\mathcal{B}$ megfelelő függvényeinek és relációinak megszorításai. Ha K struktúraosztály, akkor* $\mathbf{S}K$ *az a legszűkebb, K-t tartalmazó struktúraosztály, mely minden elemével együtt azok összes részstruktúráit is tartalmazza.*

1.11. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ részstruktúrája $\mathcal{B}$-nek. Ekkor*

(1) Ha φ tetszőleges kvantormentes formula és k tetszőleges A feletti értékelés, akkor $\mathcal{A} \models \varphi[k]$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{B} \models \varphi[k]$ teljesül.

(2) Ha φ univerzális formula és $\mathcal{B} \models \varphi$ akkor $\mathcal{A} \models \varphi$ (azaz az univerzális formulák igazsága részstruktúrákra öröklődik).

Bizonyítás. (1) igazolásával kezdjük. Összetetség szerinti indukcióval először belátjuk, hogy $\mathcal{B}$ minden t termjére teljesül, hogy

$$(*) \qquad t^{\mathcal{B}}[k] = t^{\mathcal{A}}[k].$$

Ha t változó, akkor ez nyilvánvalóan így van. Tegyük most fel, hogy $t = f(t_0, ..., t_{n-1})$ és $(*)$-ot tudjuk már $t_0, ..., t_{n-1}$-re. Ekkor

$$t^{\mathcal{B}}[k] = f^{\mathcal{B}}(t_0^{\mathcal{B}}[k], ..., t_{n-1}^{\mathcal{B}}[k]) \overset{ind.}{=} f^{\mathcal{B}}(t_0^{\mathcal{A}}[k], ..., t_{n-1}^{\mathcal{A}}[k]) = f^{\mathcal{A}}(t_0^{\mathcal{A}}[k], ..., t_{n-1}^{\mathcal{A}}[k]) = t^{\mathcal{A}}[k]$$

azaz $(*)$ igaz marad. Mivel $\mathcal{A}$ részstruktúra $\mathcal{B}$-ben és mivel $(*)$ igaz, ezért (1) is igaz, ha φ atomi formula. Tegyük most fel, hogy (1) igaz a φ és ψ formulákra. Ekkor

$$\mathcal{B} \models \neg\varphi[k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \not\models \varphi[k] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \varphi[k] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg\varphi[k], \text{ és hasonlóan}$$

$$\mathcal{B} \models \varphi \wedge \phi[k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[k], \mathcal{B} \models \psi[k] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[k], \mathcal{A} \models \psi[k] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi[k].$$

Ezek szerint (1) érvényben marad a $\neg\varphi$ és a $\varphi \wedge \psi$ formulákra is, tehát (1) minden kvantormentes formulára igaz.

Folytassuk (2) igazolásával. Legyen $\varphi = \forall v_0 ... \forall v_{n-1}\psi$, ahol ψ már kvantormentes. A feltételek szerint minden B feletti k' értékelésre teljesül, hogy $\mathcal{B} \models \psi[k']$. Ezért minden A feletti k értékelésre $\mathcal{B} \models \psi[k]$ és így (1) miatt minden ilyen értékelésre $\mathcal{A} \models \psi[k]$ is teljesül. De ez utóbbi feltétel pont azt jelenti, hogy $\mathcal{A} \models \varphi$. ∎

Feladat (nagyon-nagyon könnyű). Adjunk meg egy $\mathcal{B}$ struktúrát, ennek egy $\mathcal{A}$ részstruktúráját és egy formulát, mely $\mathcal{B}$-ben igaz, de $\mathcal{A}$-ban nem.

1.12. Definíció. *$\mathcal{A}$ elemi részstruktúrája $\mathcal{B}$-nek, ha egyrészt részstruktúrája, másrészt minden A feletti k értékelésre és minden φ formulára teljesül, hogy*

$$\mathcal{A} \models \varphi[k] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{B} \models \varphi[k].$$

Az 1.11 tétel (1) pontja szerint, ha $\mathcal{A}$ részstruktúrája $\mathcal{B}$-nek, akkor $\mathcal{A} \models \varphi[k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[k]$ teljesül minden kvantormentes φ formulára és A feletti k értékelésre. Az előző definíció szerint $\mathcal{A}$ pontosan akkor elemi része $\mathcal{B}$-nek, ha ez utóbbi feltétel *minden* (kvantoros és kvantormentes) φ formulára teljesül.

Nem minden részstruktúra elemi rész. Sőt, vannak olyan $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ struktúrapárok, hogy $\mathcal{A}$ részstruktúra $\mathcal{B}$-ben, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ elemien ekvivalens (sőt izomorf), de $\mathcal{A}$ nem elemi része $\mathcal{B}$-nek. Legyen ugyanis $\mathcal{B} = \langle \omega, < \rangle$ ahol $<$ a szokásos rendezés. Legyen $\mathcal{A}$ az a részstruktúra $\mathcal{B}$-ben, melynek alapalmaza $A = \{1, 2, 3....\}$. Ekkor az $f : B \to A$, $f(n) = n+1$ függvény egy izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között. Tehát az 1.9 (2) tétel miatt $\mathcal{A}$ valóban elemien ekvivalens $\mathcal{B}$-vel, és definíció szerint részstruktúra benne. Ugyanakkor $\mathcal{A}$ nem elemi rész: legyen $\varphi(v)$ az a formula, hogy „v a legkisebb elem" és legyen k olyan A feletti értékelés, melyre $k(v) = 1$. Világos, hogy ekkor $\mathcal{A} \models \varphi(v)[k]$ de $\mathcal{B} \not\models \varphi(v)[k]$.

Legyen $n \in \omega$ rögzített szám. Jelöljük $Form_n$-el azon formulák halmazát,melyekben legfeljebb a $v_0, ..., v_{n-1}$ változók szerepelnek. $\mathcal{A}$ n-ekvivalens $\mathcal{B}$-vel, ha

$$Th(\mathcal{A}) \cap Form_n = Th(\mathcal{B}) \cap Form_n.$$

$\mathcal{A}$ n-elemi rész $\mathcal{B}$-ben, ha egyrészt részstruktúra benne, másrészt minden $\varphi \in Form_n$-re és minden A feletti k értékelésre $\mathcal{A} \models \varphi[k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[k]$.

1.13. Tétel. *(Tarski–Vaught Teszt, Tarski–Vaught Kritérium.) Legyen $\mathcal{A}$ részstruktúra $\mathcal{B}$-ben. Ekkor*

(1) Legyen $n \in \omega$. $\mathcal{A}$ akkor és csak akkor n-elemi rész $\mathcal{B}$-ben, ha minden $Form_n$-beli $\exists v_i \varphi$ alakú formulára és A feletti k értékelésre $\mathcal{B} \models \exists v_i \varphi[k]$ esetén van olyan A feletti $k' \overset{v_i}{\equiv} k$ értékelés, melyre $\mathcal{B} \models \varphi[k']$.

(2) $\mathcal{A}$ akkor és csak akkor elemi rész $\mathcal{B}$-ben, ha minden $\exists v_i\varphi$ alakú formulára és A feletti k értékelésre $\mathcal{B} \models \exists v_i\varphi[k]$ esetén van olyan A feletti $k' \overset{v_i}{\equiv} k$ értékelés, melyre $\mathcal{B} \models \varphi[k']$.

Bizonyítás. Először (1)-et igazoljuk. Azt kell megmutatnunk, hogy a kimondott feltételek ekvivalensek azzal, hogy minden $\varphi \in Form_n$-re és A feletti k értékelésre

$$(*) \qquad \mathcal{B} \models \varphi[k] \ \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[k]$$

fennáll. Ha φ atomi formula, akkor az 1.11 tétel (1) pontja szerint $(*)$ mindig teljesül. Az összetettségre vonatkozó indukciót alkalmazunk: tegyük fel, hogy φ-re és ψ-re $(*)$ igaz. Ekkor

$$\mathcal{B} \models \neg\varphi[k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \not\models \varphi[k] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \varphi[k] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg\varphi[k], \text{ és hasonlóan}$$

$$\mathcal{B} \models \varphi \wedge \phi[k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[k], \mathcal{B} \models \psi[k] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[k], \mathcal{A} \models \psi[k] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi[k].$$

Végül a kvantoros esetet kell meggondolni. Ahol az (1)-ben szereplő feltételt használjuk, „$felt.$"-el jelezzük majd.

$\mathcal{B} \models \exists v\varphi[k] \overset{felt.}{\Leftrightarrow}$ van olyan $k' \overset{v}{\equiv} k$ A feletti értékelés, melyre $\mathcal{B} \models \varphi[k'] \overset{ind.}{\Leftrightarrow}$ van olyan $k' \overset{v}{\equiv} k$ A feletti értékelés, melyre $\mathcal{A} \models \varphi[k'] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \exists v\varphi[k]$.

Ezzel beláttuk, hogy az (1)-ben szereplő feltételből következik, hogy $\mathcal{A}$ n-elemi része $\mathcal{B}$-nek. Fordítva, ha $\mathcal{A}$ n-elemi része $\mathcal{B}$-nek, k egy A feletti értékelés és $\varphi \in Form_n$ olyan formula, hogy $\mathcal{B} \models \exists v\varphi[k]$, akkor $\mathcal{A} \models \exists v\varphi[k]$. Tehát van egy A feletti $k' \overset{v}{\equiv} k$ értékelés, melyre $\mathcal{A} \models \varphi[k']$ és ekkor $\mathcal{B} \models \varphi[k']$, mert $\mathcal{A}$ egy n-elemi része $\mathcal{B}$-nek. Ezek szerint ha $\mathcal{A}$ n-elemi része $\mathcal{B}$-nek, akkor az (1)-ben szereplő feltétel teljesül.

(2)-höz ezek után elég annyit megjegyezni, hogy a formulák $Form$ halmazára teljesül, hogy $F = \cup_{n\in\omega} Form_n$ és $\mathcal{A}$ akkor és csak akkor elemi része $\mathcal{B}$-nek, ha minden $n \in \omega$-ra n-elemi része. ∎

1.14. Definíció. *Legyenek $\mathcal{A} = \langle A, f_i, R_j\rangle_{i\in I, j\in J}$ és $\mathcal{B} = \langle B, f_i, R_j\rangle_{i\in I', j\in J'}$ struktúrák. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ reduktuma (vagy, hogy $\mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ kiterjesztése), ha $A = B$, $I \subseteq I', J \subseteq J'$ és minden $i \in I, j \in J$-re $f_i^{\mathcal{A}} = f_i^{\mathcal{B}}$, $R_j^{\mathcal{A}} = R_j^{\mathcal{B}}$.*

$\mathcal{A}$ tehát akkor reduktuma $\mathcal{B}$-nek, ha úgy kaphatjuk meg, hogy $\mathcal{B}$ típusából elhagyunk („elfelejtünk") néhány függvényt és relációt.

1.15. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ τ típusú struktúra. Ekkor van $\mathcal{A}$-nak olyan τ' típusú $\mathcal{A}'$ kiterjesztése, hogy $\mathcal{A}$ nyelvének minden $\psi = \forall v_0 ... \forall v_{n-1} \exists v_n \varphi$ prenex-alakú formulájához van $\mathcal{A}'$ nyelvén egy prenex alakú $\psi' = \forall v_0 ... \forall v_{n-1} \varphi'$ formula úgy, hogy*

- *ψ'-ben kevesebb egzisztenciális kvantor van, mint ψ-ben,*
- *$\mathcal{A}' \models \psi \Leftrightarrow \psi'$ és*
- *$\models \psi' \Rightarrow \psi$.*

Bizonyítás. Minden, az állításban megadott alakú ψ formulához bővítsük τ-t egy n-változós f_ψ függvényszimbólummal, és interpretáljuk ezeket a következőképpen. Adott $a_0, ..., a_{n-1} \in A$-ra legyen $f_\psi(a_0, ..., a_{n-1})$ egy olyan $b \in A$ elem, melyre $\mathcal{A} \models \varphi[a_0, ...a_{n-1}, b]$, ha van ilyen. Ha ilyen b nincs, akkor $f_\psi(a_0, ..., a_{n-1})$ legyen A tetszőlegesen rögzített eleme. Legyen φ' az a formula, melyet φ-ből úgy kapunk, hogy v_n minden szabad előfordulását kicseréljük $f_\psi(v_0, ..., v_{n-1})$-re. Végül legyen $\psi' = \forall v_0 ... \forall v_{n-1} \varphi'$. Ekkor ψ' valóban prenex alakú, és kevesebb egzisztenciális kvantor szerepel benne, mint ψ-ben, azaz teljesül az állítás 1. pontja.

Tegyük most fel, hogy valamely A feletti k értékelésre $\mathcal{A}' \models \psi[k]$. Ekkor minden $a_0, ..., a_{n-1} \in A$-hoz van $b \in A$ úgy, hogy $\mathcal{A}' \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}, b)[k]$ azaz $\mathcal{A}' \models \varphi'(a_0, ..., a_{n-1})[k]$. Mivel ez minden $a_0, ..., a_{n-1} \in A$-ra teljesül, ezért $\mathcal{A}' \models \psi'[k]$ is fennáll.

Fordítva, most azt tegyük fel, hogy valamely $\mathcal{B}$ τ' típusú struktúrára és B feletti k értékelésre $\mathcal{B} \models \psi'[k]$ teljesül. Ekkor minden $a_0, ..., a_{n-1} \in B$-re igaz, hogy $\mathcal{B} \models \varphi'(a_0, ..., a_{n-1}, f_\psi(a_0, ..., a_{n-1}))[k]$, ezért $\mathcal{B} \models \exists v_n \varphi(a_0, ..., a_{n-1})[k]$. Megint, mivel ez minden $a_0, ..., a_{n-1} \in B$-re így van, következik, hogy $\mathcal{B} \models \psi[k]$.

Az utolsó bekezdés szerint teljesül az állítás 3. pontja; az utolsó két bekezdés szerint pedig a 2. pontja is. ∎

Az előző tételben szereplő f_ϕ függvényeket a ϕ-hez tartozó Skolem-függvényeknek nevezik. Egy formula egy struktúrabeli Skolemizáltján olyan (esetleg bővebb nyelven felírt) univerális formulát értünk, mely a szóbanforgó struktúrában ekvivalens az eredeti formulával, és amiből következik az eredeti formula. Egy formulának természetesen több Skolemizáltja is lehet.

1.16. Tétel. *(Leszálló Löwenheim-Skolem tétel).*

(1) Minden $\mathcal{A}$ struktúrának van olyan $\mathcal{C}$ kiterjesztése, hogy $\mathcal{C}$ nyelvének minden formulája ekvivalens $\mathcal{C}$-ben egy univerzális formulával és ebből az univerzális formulából következik az eredeti formula (azaz $\mathcal{C}$ minden formulájának van $\mathcal{C}$-beli Skolemizáltja).

(2) Legyen $\mathcal{A}$ egy L-struktúra, legyen $\kappa = |Form(L)|$ és legyen $X \subseteq A$. Ekkor $\mathcal{A}$-nak van olyan $\mathcal{B}$ elemi része, melyre $X \subseteq B$ és $|B| \leq |X| \cdot \kappa \cdot \aleph_0$.

Bizonyítás. Ismét (1) bizonyításával kezdünk. Legyen $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ és ha $\mathcal{A}_n$ valamilyen $n \in \omega$-ra definiált már, akkor legyen $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}'_n$, ahol ez utóbbi struktúra $\mathcal{A}_n$-nek az 1.15 tétel szerinti kiterjesztése. Végül C legyen $\mathcal{A}$-nak az a kiterjesztése, melynek típusa az összes $\mathcal{A}_n$ típusainak uniójából áll. Megmutatjuk, hogy ez jó.

Legyen ψ a $\mathcal{C}$ nyelvének egy formulája, ez ekvivalens egy prenex formulával, ezért feltehetjük, hogy ψ maga prenex alakú. ψ egy véges szimbólumsorozat, ezért van olyan $n \in \omega$ hogy ψ már az $\mathcal{A}_n$ nyelvének is formulája. Ha ψ univerzális formula, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben van $\mathcal{A}_{n+1}$ nyelvének olyan ψ' prenex alakú formulája, mely $\mathcal{A}_{n+1}$-ben (és így persze $\mathcal{C}$-ben is) ekvivalens ψ-vel, és melyben kevesebb egzisztenciális kvantor van. Ezt a gondolatmenetet annyiszor ismételve, ahány egzisztenciális kvantor maradt ψ'-ben, adódik a kívánt univerzális formula.

(2) igazolásához rözítsük X-t és L minden ψ formulájához tekintsük a Skolemizáltjában szereplő összes függvényszimbólumot (tehát az újakat is): legyen $F = \{f : f$ egy $\mathcal{C}$-beli függvényszimbólum, mely előfordul L egy formulájának Skolemizáltjában $\}$. Világos, hogy $|F| = \kappa$, hisz $Form(L)$ elemeinek Skolemizáltjaiban mindig csak véges sok új függvényszimbólum szerepel. Legyen $X_0 = X$ és ha X_n adott már, akkor legyen $X_{n+1} = X_n \cup \{f(a_0, ..., a_{k-1}) : a_0, ..., a_{k-1} \in X_n, f \in F\}$. Végül legyen $B = \cup_{n\in\omega} X_n$. Ekkor B zárt az $\mathcal{A}$-beli (sőt, az F-beli) függvényekre. Ha ugyanis $f \in F$ egy k változós ilyen függvény, továbbá $a_0, ..., a_{k-1} \in B$, akkor van olyan $n \in \omega$ hogy $a_0, ..., a_{k-1} \in X_n$ és ezért $f(a_0, ..., a_{k-1}) \in X_{n+1} \subseteq B$ is teljesül. B tehát $\mathcal{A}$ egy részstruktúrájának alaphalmaza, legyen $\mathcal{B}$ a hozzá tartozó $\mathcal{A}$-típusú részstruktúra és legyen $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$ F típusú reduktumának az a részstruktúrája, melynek B az alaphalmaza. Világos, hogy $\mathcal{B}$ reduktuma $\mathcal{B}'$-nek. Állítjuk, hogy $\mathcal{B}$ elemi része $\mathcal{A}$-nak. Tegyük fel ugyanis, hogy $\mathcal{A} \models \varphi[k]$ valamely B feletti k értékelésre. Legyen φ' a φ Skolemizáltja, ekkor $\mathcal{C} \models \varphi'[k]$. Ez a Skolemizált φ' egy univerzális formula, ezért az 1.11 tétel miatt $\mathcal{B}' \models \varphi'[k]$ ezért (1) miatt (részletesebben: az 1.15 tétel 3. pontja ismételt alkalmazásai miatt miatt) $\mathcal{B}' \models \varphi[k]$ vagyis $\mathcal{B} \models \varphi[k]$. Fordítva, ha $\mathcal{A} \not\models \varphi[k]$ akkor $\mathcal{A} \models \neg\varphi[k]$ és így az előzőek szerint $\mathcal{B} \models \neg\varphi[k]$, vagyis $\mathcal{B} \not\models \varphi[k]$. Ezek szerint $\mathcal{A} \models \varphi[k]$ és $\mathcal{B} \models \varphi[k]$ egyszerre teljesül vagy nem teljesül, így $\mathcal{B}$ valóban elemi rész $\mathcal{A}$-ban.

Végül figyeljük meg, hogy $|F| = \kappa$ miatt

$|X_1| \leq |F| \cdot (|X| + \aleph_0)$,

$|X_2| \leq \kappa \cdot (|X_1| + \aleph_0) \leq \kappa \cdot (|X| + \aleph_0)$

és hasonlóan minden $n \in \omega$-ra $|X_{n+1}| \leq \kappa\cdot(|X|+\aleph_0)$ ezért $|B| \leq \aleph_0\cdot(\kappa\cdot(|X|+\aleph_0)) \leq |X| \cdot \kappa \cdot \aleph_0$. ∎

1.4. Láncok, elemi láncok

A fejezet egyik fő célja bemutatni egy $\forall\exists$-formulák igazságát megőrző modellkonstrukciós módszert.

1.17. Definíció. *Legyen α rendszám és legyenek $\langle \mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ azonos típusú struktúrák. Ha minden $\gamma \leq \beta < \alpha$-ra teljesül, hogy $\mathcal{A}_\gamma$ (elemi) részstruktúrája $\mathcal{A}_\beta$-nak, akkor $\langle \mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha \rangle$-t (elemi) láncnak nevezzük.*

Világos, hogy struktúrák egy elemi lánca lánc is. Legyen $\langle \mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ egy lánc és legyen $A = \cup_{\beta<\alpha} A_\beta$. Ekkor minden $a \in A$-hoz van olyan $\beta < \alpha$ hogy $a \in A_\beta$;

legyen $\nu(a) = min\{\beta < \alpha : \ a \in A_\beta \}$.

Láncunk limeszén (vagy unióján) a következő $\mathcal{A}$ struktúrát értjük. $\mathcal{A}$ alaphalmaza $A = \cup_{\beta<\alpha} A_\beta$; ha f n-változós függvényszimbólum a lánc struktúráinak közös nyelvében és $a_0, ..., a_{n-1} \in A$ akkor legyen $\mu = max\{\nu(a_i) : i < n\}$. Mivel $\mathcal{A}_{\nu(a_0)}, ..., \mathcal{A}_{\nu(a_{n-1})}$ mind részstruktúra $\mathcal{A}_\mu$-ben, ezért $f^{\mathcal{A}_\mu}$ értelmezve van $a_0, ..., a_{n-1}$-en. Legyen

$$f^{\mathcal{A}}(a_0, ..., a_{n-1}) = f^{\mathcal{A}_\mu}(a_0, ..., a_{n-1}),$$

világos, hogy minden $\lambda > \mu$-re $f^{\mathcal{A}}(a_0, ..., a_{n-1}) = f^{\mathcal{A}_\lambda}(a_0, ..., a_{n-1})$. Hasonlóan, ha R egy m-változós relációszimbólum és $a_0, ..., a_{m-1} \in A$, akkor legyen $\mu = max\{\nu(a_i) : i < m\}$ és definiáljuk $R^{\mathcal{A}}$-t így:

$$R^{\mathcal{A}}(a_0, ..., a_{n-1}) \Leftrightarrow R^{\mathcal{A}_\mu}(a_0, ..., a_{n-1}).$$

Megint, a feltétel jobboldalán μ-t kicserélhetnénk egy tetszőleges $\lambda \geq \mu$ rendszámra. Az elnevezést az indokolja, hogy ha a szóbanforgó függvényekre és relációkra úgy gondolunk, mint halmazokra, akkor a konstrukció szerint $f^{\mathcal{A}} = \cup_{\beta<\alpha} f^{\mathcal{A}_\beta}$ és $R^{\mathcal{A}} = \cup_{\beta<\alpha} R^{\mathcal{A}_\beta}$. Ennek megfelelően, az $\langle \mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ lánc limeszét $\cup_{\beta\in\alpha} \mathcal{A}_\beta$-val (is) fogjuk jelölni.

Figyeljük még meg, hogy ha α rákövetkező rendszám, mondjuk $\alpha = \delta + 1$, akkor az $\langle \mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ lánc limesze azonos az $\mathcal{A}_\delta$ struktúrával. Ezért a konstrukció akkor igazán érdekes, ha α limeszrendszám.

1.18. Tétel. *Legyen az $\langle \mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ lánc limesze $\mathcal{A}$. Ekkor*
(1) Minden $\beta < \alpha$-ra $\mathcal{A}_\beta$ részstruktúra $\mathcal{A}$-ban.
(2) Ha $\langle \mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ egy elemi lánc, akkor minden $\beta < \alpha$-ra $\mathcal{A}_\beta$ elemi része $\mathcal{A}$-nak.

Bizonyítás. (1) világos: $\mathcal{A}_\beta$ alaphalmaza része A-nak, és $\mathcal{A}$ műveletei és relációi $\mathcal{A}_\beta$ megfelelő műveleteinek illetve relációinak kiterjesztései.

(2) igazolásához a formulák összetettsége szerinti indukciót fogunk alkalmazni. Legyen $\beta < \alpha$ rögzített, legyen φ egy atomi formula és legyen k egy A_β feletti értékelés. Ekkor az 1.11 tétel és a most igazolt (1) pont miatt

$$(*) \qquad \mathcal{A} \models \varphi[k] \text{ és } \mathcal{A}_\beta \models \varphi[k] \text{ egyszerre teljesül.}$$

Tegyük most fel, hogy minden $\beta < \alpha$-ra és minden A_β feletti k értékelésre $(*)$-ot igazoltuk már a φ és a ψ formulákra. Ekkor a $\varphi \wedge \psi$ illetve a $\neg\varphi$ formulákra áttérés például az 1.11 tétel bizonyításából másolható rutinmunka.

Tegyük végül fel, hogy $\mathcal{A} \models \exists v \varphi[k]$. Ekkor van olyan $k' \overset{v}{\equiv} k$ A feletti értékelés, melyre $\mathcal{A} \models \varphi[k']$. Legyen $\mu = max\{\beta, \nu(k(v))\}$, ekkor k' egy A_μ feletti értékelés. Az indukciós feltevéseink szerint ekkor $\mathcal{A}_\mu \models \varphi[k']$. Mivel $\mathcal{A}_\beta$ elemi rész $\mathcal{A}_\mu$-ben, van olyan $k'' \overset{v}{\equiv} k'$ A_β feletti értékelés, melyre $\mathcal{A}_\beta \models \varphi[k'']$, azaz $\mathcal{A}_\beta \models \exists v \varphi[k]$, hiszen

$k'' \overset{v}{\equiv} k' \overset{v}{\equiv} k$. Végül fordítva, ha $\mathcal{A}_\beta \models \exists v\varphi[k]$, akkor alkalmas $k' \overset{v}{\equiv} k$ A_β feletti értékeléssel $\mathcal{A}_\beta \models \varphi[k']$ ezért az indukciós feltétel szerint $\mathcal{A} \models \varphi[k']$ azaz $\mathcal{A} \models \exists v\varphi[k]$. Ezzel $(*)$-ot beláttuk $\exists v\varphi$-re is minden $\beta < \alpha$ -ra és $\mathcal{A}_\beta$ feletti k értékelésre. ∎

A következő tételben megmutatjuk, hogy $\forall\exists$-formulák igazsága öröklődik láncok limeszére: ha egy ilyen formula egy lánc minden struktúrájában igaz, akkor a limeszstruktúrában is igaz marad.

1.19. Tétel. *Legyen az $\langle \mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha\rangle$ lánc limesze az $\mathcal{A}$ struktúra, és tegyük fel, hogy $\varphi = \forall x_0 ... \forall x_{n-1} \exists y_0 ... \exists y_m \psi$ egy olyan $\forall\exists$ formula, melyben ψ már kvantormentes, és minden $\beta < \alpha$-ra teljesül, hogy $\mathcal{A}_\beta \models \varphi$. Ekkor $\mathcal{A} \models \varphi$.*

Bizonyítás. Legyen $a_0, ..., a_{n-1} \in A$ tetszőleges, meg kell mutatnunk, hogy van olyan $b_0, ..., b_{m-1} \in A$, hogy $\mathcal{A} \models \psi[a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1}]$. Ehhez legyen $\mu = max\{\nu(a_i) : i < n\}$, ekkor $a_0, ..., a_{n-1} \in A_\mu$. Mivel $\mathcal{A}_\mu \models \varphi$, van olyan $b_0, ..., b_{m-1} \in A_\mu$, hogy $\mathcal{A}_\mu \models \psi[a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1}]$. Azonban ψ kvantormentes, ezért az 1.11 tétel szerint $\mathcal{A} \models \psi[a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1}]$, ahogy kívántuk. ∎

1.5. Homomorf képek, direktszorzatok

Ebben a részben a címben szereplő, algebrai tanulmányainkból is ismert konstrukciókat általánosítjuk tetszőleges struktúrákra.

1.20. Definíció. *Legyenek $\mathcal{A} = \langle A, g_i^{\mathcal{A}}, R_j^{\mathcal{A}}\rangle_{i\in I, j\in J}$ és $\mathcal{B} = \langle B, g_i^{\mathcal{B}}, R_j^{\mathcal{B}}\rangle_{i\in I, j\in J}$ azonos típusú struktúrák. Az $f : A \to B$ függvényt homomorfizmusnak nevezzük, ha teljesül, hogy minden $i \in I$-re és $j \in J$-re*

- *ha $a_0, ..., a_{\tau(g_i)-1} \in A$ akkor $f(g_i^{\mathcal{A}}(a_0, ..., a_{\tau(g_i)-1}) = g_i^{\mathcal{B}}(f(a_0), ..., f(a_{\tau(g_i)-1}))$ és*
- *ha $a_0, ..., a_{\tau(R_j)-1} \in A$ akkor $\langle a_0, ..., a_{\tau(R_j)-1}\rangle \in R_j^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle f(a_0), ..., f(a_{\tau(R_j)-1})\rangle \in R_j^{\mathcal{B}}$.*

Tehát az izomorfizmusok pontosan a bijektív homomorfizmusok. Az injektív homomorfizmusokat beágyazásoknak nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ struktúra elemien beágyazható $\mathcal{B}$-be, ha van olyan $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ beágyazás, melynek értékkészlete elemi rész $\mathcal{B}$-ben; $\mathcal{A}$ pontosan akkor ágyazható (elemien) $\mathcal{B}$-be, ha $\mathcal{A}$ izomorf $\mathcal{B}$ egy (elemi) részstruktúrájával.

Feladat. Egy formulát pozitívnak nevezünk, ha az atomi formulákból felépíthető az $\wedge, \vee, \exists, \forall$ összekötő jelekkel. Igazoljuk (például összetettség szerinti indukcióval), hogy ha $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egy szürjektív homomorfizmus, akkor minden pozitív φ formulára és A feletti k értékelésre $\mathcal{A} \models \varphi[k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[f \circ k]$.

1.21. Definíció. *Legyen L egy elsőrendű nyelv és legyen $\mathcal{A}$ egy L-struktúra. Vezessünk be A minden eleméhez egy új c_a konstansszimbólumot, melyet $\mathcal{A}$-ban interpretáljunk a-val. A kibővített nyelvet L_A-val jelöljük.*

• $\mathcal{A}$ diagrammja (melyet $\Delta(\mathcal{A})$-val jelölünk) az összes olyan L_A-beli atomi formulákból álló halmaz, mely formulák igazak $\mathcal{A}$-ban és nincs bennük változó.

• $\mathcal{A}$ elemi diagrammja (melyet $\Delta_e(\mathcal{A})$-val jelölünk) az összes olyan L_A-beli elsőrendű formulákból álló halmaz, mely formulák igazak $\mathcal{A}$-ban és nincs bennük szabadon előforduló változó.

Feladat. Legyen K_3 a 3 csúcsú teljes gráf. Adjuk meg K_3 diagrammját.

1.22. Tétel. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ L-struktúrák.*

(1) $\mathcal{A}$ akkor és csak akkor ágyazható be $\mathcal{B}$-be ha $\mathcal{B}$-nek van olyan L_A nyelvű $\mathcal{B}'$ kiterjesztése, hogy $\mathcal{B}' \models \Delta(\mathcal{A})$.

(2) $\mathcal{A}$ akkor és csak akkor ágyazható be elemien $\mathcal{B}$-be, ha $\mathcal{B}$-nek van olyan L_A nyelvű $\mathcal{B}'$ kiterjesztése, hogy $\mathcal{B}' \models \Delta_e(\mathcal{A})$.

Bizonyítás. (1) igazolásához először tegyük fel, hogy $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egy beágyazás. Minden $a \in A$-ra legyen $c_a^{\mathcal{B}'} = f(a)$ és legyen $\mathcal{B}' = \langle \mathcal{B}, c_a^{\mathcal{B}'} \rangle_{a \in A}$. Ekkor $\mathcal{B}' \models \Delta(\mathcal{A})$ a következők miatt. Legyen $\mathcal{B}_0$ az f értékkészletének megfelelő $\mathcal{B}$-beli részstruktúra. Ekkor f egy izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}_0$ között. Ezért tetszőleges $R(c_{a_0}, ..., c_{a_{n-1}}) \in \Delta(\mathcal{A})$ atomi formulára az 1.9 és 1.11 tételek miatt $\mathcal{A} \models R[a_0, ..., a_{n-1}] \Leftrightarrow \mathcal{B}_0 \models R[f(a_0), ..., f(a_{n-1})] \Leftrightarrow \mathcal{B}' \models R(c_{a_0}, ..., c_{a_{n-1}})$. Fordítva, ha $\mathcal{B}$-nek egy $\mathcal{B}'$ kiterjesztése modellje $\Delta(\mathcal{A})$-nak, akkor legyen minden $a \in A$-ra $f(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$. Ez az f függvény injektív, mert ha a és b különböző A-beli elemek, akkor $c_a \neq c_b \in \Delta(\mathcal{A})$, és mivel $\mathcal{B}' \models \Delta(\mathcal{A})$, ezért $f(a) = c_a^{\mathcal{B}'} \neq c_b^{\mathcal{B}'} = f(b)$. Hasonlóan igazolható, hogy f homomorfizmus is.

Hasonlóan, (2) igazolásához először tegyük fel, hogy $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egy elemi beágyazás és legyen $\mathcal{B}_0$ az f értékkészletének megfelelő részstruktúra $\mathcal{B}$-ben. A feltételek szerint $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}_0$ izomorfak és $\mathcal{B}_0$ elemi része $\mathcal{B}$-nek. Legyen megint minden $a \in A$-ra $c_a^{\mathcal{B}'} = f(a)$. Világos, hogy f izomorfizmus marad $\langle \mathcal{A}, a \rangle_{a \in A}$ és $\langle \mathcal{B}_0, c_a^{\mathcal{B}'} \rangle_{a \in A}$ között, ezért ez utóbbi struktúra modellje $\Delta_e(\mathcal{A})$-nak.

Legyen $\varphi(c_{a_0}, ..., c_{a_{n-1}}) \in \Delta_e(\mathcal{A})$, legyen φ' az az L nyelvű formula, melyet φ-ből úgy kapunk, hogy a c_{a_i} konstansszimbólumokat rendre a megfelelő v_i változóra cseréljük, és legyen k az a B feletti értékelés, melyre $k(v_i) = c_{a_i}^{\mathcal{B}'}$ minden v_i-re. Világos, hogy $\mathcal{B}' \models \varphi$ és $\mathcal{B} \models \varphi'[k]$ egyszerre teljesül, vagy nem teljesül. Az előző bekezdés miatt azonban $\langle \mathcal{B}_0, c_a^{\mathcal{B}'} \rangle_{a \in A} \models \Delta_e(\mathcal{A})$ ezért minden $\varphi \in \Delta_e(\mathcal{A})$-ra $\mathcal{B}_0 \models \varphi'[k]$. De $\mathcal{B}_0$ elemi része $\mathcal{B}$-nek, ezért $\mathcal{B} \models \varphi'[k]$ és így $\mathcal{B}' \models \varphi$ azaz $\mathcal{B}' \models \Delta_e(\mathcal{A})$.

Végül fordítva, most azt tegyük fel, hogy $\mathcal{B}$ egy alkalmas $\mathcal{B}'$ kiterjesztése modellje $\Delta_e(\mathcal{A})$-nak. Mint (1) bizonyításánál, legyen most is minden $a \in A$-ra $f(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$. Mivel $\Delta(\mathcal{A}) \subseteq \Delta_e(\mathcal{A})$, ezért (1) szerint f beágyazás, legyen $\mathcal{B}_0$ az f értékkészletének megfelelő részstruktúra $\mathcal{B}$-ben. azt kell igazolni, hogy ez elemi része $\mathcal{B}$-nek. Ehhez az 1.13 Tarski-Vaught tételt fogjuk alkalmazni: legyen $\varphi \in Form(L)$ és legyen k egy B_0 feletti értékelés, melyre igaz, hogy $\mathcal{B} \models \exists v\varphi[k]$. Legyen ψ az a formula, melyet úgy kapunk φ-ből, hogy minden szabadon előforduló v_i változót $c_{f^{-1}(k(v_i))}$-re cserélünk. Ekkor $\mathcal{B} \models \exists v\psi$ és $\psi \in \Delta_e(\mathcal{A})$. Emiatt $\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A} \models \exists v\psi$, azaz van olyan $b \in A$, hogy $\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A} \models \psi[b]$ tehát $\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A} \models \psi(c_b)$. Ezek szerint $\psi(c_b) \in \Delta_e(\mathcal{A})$ és ezért $\mathcal{B}' \models \psi(c_b)$. Legyen k' az az értékelés, mely v-t $c_b^{\mathcal{B}'}$-re képezi, a többi változót ugyanoda, ahova k. Ekkor k' egy B_0 feletti értékelés és $\mathcal{B}' \models \varphi[k']$, vagyis a Tarski-Vaught Teszt miatt $\mathcal{B}_0$ valóban elemi része $\mathcal{B}$-nek. ∎

Az elemi beágyazás fogalmát általánosítja a következő definíció.

1.23. Definíció. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ azonos típusú struktúrák. Az f függvényt $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közötti elemi leképezésnek nevezzük, ha $dom(f) \subseteq A$ (tehát f esetleg csak A egy valódi részhalmazán van értelmezve) és minden $dom(f)$ feletti k értékelésre és φ formulára teljesül, hogy $\mathcal{A} \models \varphi[k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[f \circ k]$.*

Az elemi leképezéseket a 2.8 fejezettől kezdve fogjuk használni.

1.24. Definíció. *Legyen L egy nyelv, I egy halmaz és legyen minden $i \in I$-re $\mathcal{A}_i$ egy L-nyelvű struktúra. Az $\mathcal{A} = \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i$ direktszorzat-struktúrát a következő módon definiáljuk:*

- *$\mathcal{A}$ alaphalmaza az $\mathcal{A}_i$ struktúrák alaphalmazainak direktszorzata: $A = \Pi_{i\in I}A_i$;*
- *Ha f egy n-változós L-beli függvényszimbólum, akkor minden $s_0, ..., s_{n-1} \in A$-ra*

$$f^{\mathcal{A}}(s_0, ..., s_{n-1}) = \langle f^{\mathcal{A}_i}(s_0(i), ..., s_{n-1}(i)) : \ i \in I\rangle;$$

- *Ha R egy m-változós L-beli relációszimbólum, akkor minden $s_0, ..., s_{m-1} \in A$-ra*

$$R^{\mathcal{A}}(s_0, ..., s_{m-1}) \Leftrightarrow (\forall i \in I)R^{\mathcal{A}_i}(s_0(i), ..., s_{m-1}(i)).$$

Egy direktszorzat elemei tehát a komponens-struktúrák alaphalmazainak kiválasztási függvényei, és a direktszorzat műveletei és relációi „koordinátánként hatnak”.

Feladat. Azt mondjuk, hogy $\phi_0 \wedge ... \wedge \phi_{n-1} \Rightarrow \psi$ egy implikációs formula, ha $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$ és ψ atomi formulák. Legyen $\varphi = Q_0v_0...Q_kv_k\sigma$ olyan prenex formula, melyben σ implikációs formula. Igazoljuk, hogy φ igazsága öröklődik direktszorzatra, azaz ha minden $i \in I$-re $\mathcal{A}_i \models \varphi$ akkor $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i \models \varphi$.

2. Ultraszorzatok

Ebben a fejezetben (pontosabban a 2.4 alfejezetben) a modellelmélet egyik igen érdekes és hasznos konstrukciójával ismerkedünk meg. A konstrukció leírásához további előkészületek kellenek; az előkészületek során bevezetett fogalmak önmagukban is érdekesek, sok más logikán kívüli alkalmazásuk is van. Ezekre alább ki is térünk.

2.1. Szűrők és ultraszűrők

Az ultraszorzat konstrukció ismertetése előtt a szűrő és ultraszűrő fogalmát fogjuk felidézni. Ezek már ismertek lehetnek korábbi algebrai, topológiai, halmazelméleti tanulmányainkból.

2.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{B}$ egy Boole-algebra. Az $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ halmazt $\mathcal{B}$-beli szűrőnek nevezzük, ha a következő tulajdonságok teljesülnek minden $x, y \in B$-re.*

- *$\mathcal{F} \neq \emptyset$ és $0^{\mathcal{B}} \notin \mathcal{F}$,*
- *Ha $x, y \in \mathcal{F}$ akkor $x \wedge y \in \mathcal{F}$ (metszet-zártság),*
- *Ha $x \leq y$ és $x \in \mathcal{F}$ akkor $y \in \mathcal{F}$ (felszálló tulajdonság).*

Az $\mathcal{F}$ szűrőt ultraszűrőnek nevezzük, ha minden $x \in B$ elemre teljesül, hogy $x \in \mathcal{F}$ vagy $-x \in \mathcal{F}$.

Egyetlen $\mathcal{B}$-beli $\mathcal{U}$ ultraszűrőre és $x \in B$-re sem teljesülhet, hogy $x \in \mathcal{U}$ és $-x \in \mathcal{U}$ mert ebben az esetben a metszet-zártság miatt $0 \in \mathcal{U}$ következne, ami ellentmond a szűrők definíciójában szereplő első tulajdonságnak. Az első tulajdonság miatt $0^{\mathcal{B}}$ nem eleme $\mathcal{U}$-nak, ezért az utolsó tulajdonság miatt $-0^{\mathcal{B}} = 1^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U}$. Az is világos, hogy a metszet-zártság miatt $\mathcal{U}$ „véges metszetre is zárt”, azaz akárhogyis választunk $\mathcal{U}$-ból tetszőlegesen sok, de véges számú elemet, ezek metszete szintén $\mathcal{U}$-beli lesz.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy $\mathcal{B}$ Boole-algebra egy F részhalmazára teljesül, hogy

- $0^{\mathcal{B}} \notin F$, $F \neq \emptyset$,
- ha $x, y \in F$ akkor $x \wedge y \in F$,
- minden $a \in B$-re $a \in F$ vagy $-a \in F$,

akkor F ultraszűrő $\mathcal{B}$-n.

Gyakran fogunk azzal az esettel találkozni, amikor a $\mathcal{B}$ Boole-algebra egy I halmaz hatványhalmaza (a halmazelméleti $\cap$-el és az I-re vonatkozó komplementumképzéssel, mint műveletekkel). Ebben az esetben a rövidség kedvéért $\mathcal{P}(I)$-beli (ultra)szűrők helyett I feletti (ultra)szűrőkről fogunk beszélni.

Az I feletti szűrőket úgy képzelhetjük el, mint I (valamilyen szempontból) nagy részhalmazainak egy családját. Legyen ugyanis $\mathcal{F}$ egy szűrő, és legyen $\mu_{\mathcal{F}} : \mathcal{P}(I) \to \{0, 1\}$ a következő függvény: minden $x \subseteq I$-re

$\mu_{\mathcal{F}}(x) = 1$, ha $x \in \mathcal{F}$,
$\mu_{\mathcal{F}}(x) = 0$, ha $I - x \in \mathcal{F}$,
Ha az előző feltételek egyike sem teljesül, akkor x-n $\mu_{\mathcal{F}}$ nincs értelmezve.

Ekkor $\mu_{\mathcal{F}}$ egy monoton, végesen additív halmazfüggvény, melyre $\mu_{\mathcal{F}}(\emptyset) = 0$ és $\mu_{\mathcal{F}}(I) = 1$. Az ilyen halmazfüggvényeket $0-1$ mértékeknek szokás nevezni. Legyen most μ egy $0-1$ mérték, és legyen $\mathcal{F}_\mu = \{x \subseteq I : \mu(x) = 1\}$. Ekkor $\mathcal{F}_\mu$ egy szűrő I felett.

Látjuk tehát, hogy a szűrők és a $0-1$ mértékek kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Ennek megfelelően, ha egy tulajdonság egy szűrőelem (vagyis nagy halmaz) minden elemére teljesül, akkor azt is mondjuk, hogy a tulajdonság majdnem mindenütt teljesül.

Ha $\mathcal{F}$ ultraszűrő, akkor I minden részhalmaza mérhető $\mu_{\mathcal{F}}$ szerint. Most megmutatjuk, hogy minden nemüres halmaz felett vannak ultraszűrők.

2.2. Tétel. *Legyen I nemüres halmaz és legyen $a \in I$ tetszőleges elem. Ekkor az*

$$U_a = \{x \subseteq I : a \in x\}$$

halmazrendszer egy I feletti ultraszűrő.

Bizonyítás. Az ultraszűrők definiíciójában szereplő tulajdonságokat kell ellenőrizni. Világos, hogy $\emptyset \notin U_a$ és $\{a\} \in U_a$ miatt, hogy $U_a \neq \emptyset$. A felszálló tulajdonság is nyilvánvaló. U_a zárt metszetre, mert ha $x, y \subseteq U_a$, akkor $a \in x, y$ és így $a \in x \cap y$ ezért $x \cap y \in U_a$. Végül tetszőleges $x \subseteq I$-re $a \in x$ vagy $a \in I - x$, tehát x és $I - x$ valamelyike U_a-beli halmaz. ∎

Ha $\mathcal{U}$ olyan ultraszűrő I felett melyhez van $a \in I$ hogy $\mathcal{U} = U_a$, akkor $\mathcal{U}$-t az a-hoz tartozó főszűrőnek nevezzük. Általában, ha $\mathcal{B}$ egy Boole-algebra és $a \in B$ akkor az $\mathcal{F}_a = \{x \in B : a \leq x\}$ halmaz az a-hoz tartozó főszűrő. $\mathcal{F}_a$ pontosan akkor ultraszűrő, ha a atom $\mathcal{B}$-ben.

Ha I véges halmaz, akkor I felett minden ultraszűrő főszűrő, azaz véges alaphalmaz esetén ez az egyetlen mód amivel ultraszűrőt konstruálhatunk.

Tegyük fel ugyanis, hogy $\mathcal{U}$ nemfő ultraszűrő a véges I halmaz felett. Ekkor minden $a \in I$-re az teljesül, hogy $I - \{a\} \in \mathcal{U}$. Mivel azonban I véges, $\cap_{a \in I} I - \{a\} \in \mathcal{U}$ következne, mert $\mathcal{U}$ véges metszetre zárt. Ugyanakkor $\cap_{a \in I} I - \{a\} = \emptyset$, ellentmondva annak, hogy egy szűrő az üres halmazt nem tartalmazhatja.

Végtelen alaphalmaz felett a következőképpen konstruálhatunk nemfő szűrőt. Legyen I végtelen halmaz, és legyen

$$\mathcal{F} = \{x \subseteq I : \ I - x \text{ véges halmaz } \}.$$

Könnyen ellenőrízhető, hogy ez a halmazrendszer szűrő. $\mathcal{F}$-et az I feletti Fréchet-szűrőnek nevezzük. A Fréchet szűrő nem ultraszűrő, mert I-nek van olyan végtelen részhalmaza melynek komplementuma is végtelen. Következő célunk, hogy igazoljuk nemfő ultraszűrők létezését is.

2.3. Definíció. *Legyen $\mathcal{B}$ Boole-algebra, $U \subseteq B$. Azt mondjuk, hogy U rendelkezik a véges metszet tulajdonsággal, ha akárhogyis választunk U-ból tetszőleges számú, de véges sok elemet, ezen elemek metszete nem egyenlő $0^{\mathcal{B}}$-vel .*

Az előbbi definícióban nem követeltük meg, hogy az U elemeiből képzett metszet maga is U-beli legyen – csak azt írtuk elő, hogy ez a metszet ne a nullelem legyen.

2.4. Tétel.

(1) Ha U véges metszet tulajdonságú nemüres halmaz a $\mathcal{B}$ Boole-algebrában, akkor van (a halmazelméleti tartalmazás szerint) legkisebb olyan $\mathcal{F}$ $\mathcal{B}$-beli szűrő, amely tartalmazza U-t (ezt az $\mathcal{F}$-et az U által generált szűrőnek nevezzük).

(2) Ha $\mathcal{F}$ szűrő $\mathcal{B}$-ben, akkor van olyan $\mathcal{U}$ ultraszűrő $\mathcal{B}$-ben, melyre $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Bizonyítás. (1) igazolásához tegyük fel, hogy U véges metszet tulajdonságú, és tekintsük az

$$\mathcal{F} = \{x \in B : \ (\exists y_0, ..., y_{n-1} \in U) \ y_0 \wedge ... \wedge y_{n-1} \leq x\}$$

halmazt. Mivel U véges metszet tulajdonságú, $0^{\mathcal{B}} \notin \mathcal{F}$ és nyilvánvaló, hogy $U \subseteq \mathcal{F}$, így $\mathcal{F}$ nem az üreshalmaz. Az is világos, hogy $\mathcal{F}$ felszálló. Végül, megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}$ metszetre zárt. Ha $x, x' \in \mathcal{F}$, akkor vannak $y_0, ..., y_{n-1}$ és $y'_0, ..., y'_{m-1} \in U$ elemek, melyekre $y_0 \wedge ... \wedge y_{n-1} \leq x$ és $y'_0 \wedge ... \wedge y'_{m-1} \leq x'$. De ekkor $y_0 \wedge ... \wedge y_{n-1} \wedge y'_0 \wedge ... \wedge y'_{m-1} \leq x \wedge x'$ azaz $x \wedge x' \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ tehát egy U-t tartalmazó szűrő. Ugyanakkor a véges metszetre való zártság és a felszálló tulajdonság miatt minden U-t tartalmazó szűrőnek tartalmaznia kell $\mathcal{F}$-et is. Ezzel (1)-et igazoltuk.

(2) igazolásához tekintsük az összes $\mathcal{F}$-et tartalmazó szűrők $\mathcal{H}$ halmazát, vagyis legyen

$$\mathcal{H} = \{\mathcal{G} \subseteq B : \ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}, \ \mathcal{G} \text{ szűrő}\}.$$

$\mathcal{H}$-t a halmazelméleti tartalmazás részbenrendezi, e részbenrendezett halmazra a Zorn-lemmát szeretnénk alkalmazni. Ehhez meg kell mutatni, hogy $\mathcal{H}$ minden lineárisan rendezett részhalmazának van felső korlátja $\mathcal{H}$-ban.

Legyen tehát $H \subseteq \mathcal{H}$ olyan részhalmaz, melynek bármely két eleme összehasonlítható, azaz H elemei olyan ($\mathcal{F}$-et tartalmazó) szűrők, melyek közül bármely kettő része vagy kiterjesztése a másiknak. A tartalmazás szerint $\cup H$ H egy felső korlátja. Meg kell megmutatnunk, hogy $\cup H \in \mathcal{H}$, vagyis, hogy $\cup H$ maga is szűrő. Nyilvánvaló, hogy $0^{\mathcal{B}} \notin \cup H$ és $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \cup H$ miatt $H \neq \emptyset$. Ha $x \leq y$ és $x \in \cup H$ akkor van olyan $\mathcal{G} \in H$ melyre $x \in \mathcal{G}$. De $\mathcal{G}$ szűrő, ezért $y \in \mathcal{G}$ és emiatt $y \in \cup H$ azaz $\cup H$ felszálló. Végül, ha $x, x' \in \cup H$, akkor vannak olyan $\mathcal{G}, \mathcal{G}' \in H$ melyekre $x \in \mathcal{G}$ és $x' \in \mathcal{G}'$. H lineárisan rendezett a tartalmazás szerint, ezért $\mathcal{G}$ és $\mathcal{G}'$ közül az egyik tartalmazza a másikat, legyen mondjuk $\mathcal{G}$ a nagyobb. Ekkor $x, x' \in \mathcal{G}$. Viszont $\mathcal{G}$ metszetre zárt, igy $x \wedge x' \in \mathcal{G} \subseteq \cup H$ azaz $\cup H$ metszetre zárt. Ezzel beláttuk, hogy $\cup H \in \mathcal{H}$. Emiatt H-nak van felső korlátja $\mathcal{H}$-ban.

Az előző bekezdés szerint alkalmazható a Zorn lemma a $\langle \mathcal{H}, \subseteq \rangle$ részbenrendezett halmazra, legyen $\mathcal{U}$ egy maximális elem $\mathcal{H}$-ban. A konstrukció miatt $\mathcal{U}$ egy $\mathcal{F}$-et tartalmazó szűrő. A bizonyítás befejezéseképpen megmutatjuk, hogy $\mathcal{U}$ ultraszűrő.

Ha nem ez volna a helyzet, akkor lenne olyan $x \in B$ melyre $x \notin \mathcal{U}$ és $-x \notin \mathcal{U}$ teljesülne. Ugyanakkor $\mathcal{U} \cup \{x\}$ nem lehet véges metszet tulajdonságú halmaz, mert ekkor (1) miatt $\mathcal{U}$-nál bővebb szűrőt generálna, ami $\mathcal{U}$ maximális volta miatt lehetetlen. Tehát vannak olyan $y_0, ..., y_{n-1} \in \mathcal{U}$ elemek, melyekre

$$x \wedge y_0 \wedge ... \wedge y_{n-1} = 0^{\mathcal{B}},$$

vagyis $-x \geq y_0 \wedge ... \wedge y_{n-1}$. Teljesen hasonlóan $\mathcal{U} \cup \{-x\}$ sem lehet véges metszet tulajdonságú, ezért vannak olyan $y'_0, ..., y'_{m-1} \in \mathcal{U}$ elemek, melyekre

$$-x \wedge y'_0 \wedge ... \wedge y_{m-1} = 0^{\mathcal{B}},$$

azaz $x \geq y'_0 \wedge ... \wedge y'_{m-1}$. Viszont ekkor $0^{\mathcal{B}} = x \wedge (-x) \geq y_0 \wedge ... \wedge y_{n-1} \wedge y'_0 \wedge ... \wedge y'_{m-1} \in \mathcal{U}$ következne, ami lehetetlen, mert $\mathcal{U}$ szűrő. ∎

Ezek szerint végtelen halmazok felett vannak nemfő ultraszűrők, hiszen a Fréchet szűrő az előző tétel miatt kiterjeszthető egy $\mathcal{U}$ ultraszűrővé és ez a kiterjesztés nem lehet főszűrő, hiszen a Fréchet szűrő tartalmazza az alaphalmaz véges részeinek komplementumait. Ezért $\mathcal{U}$ nem tartalmaz véges halmazokat, tehát az alaphalmaz egyetlen a elemére sem teljesülhet, hogy $\{a\} \in \mathcal{U}$.

2.5. Tétel. *Legyen $\mathcal{U}$ ultraszűrő az I halmaz felett, legyen $J \in \mathcal{U}$ és tegyük fel, hogy a $J_0, ..., J_{n-1} \subseteq J$ páronként diszjunkt halmazok uniója egyenlő J-vel. Ekkor pontosan egy $i \in n$ van, melyre $J_i \in \mathcal{U}$.*

Bizonyítás. Ha lennének olyan különböző $i_0, i_1 < n$ indexek, melyekre $J_{i_0} \in \mathcal{U}$ és $J_{i_1} \in \mathcal{U}$ is fennállna, akkor $\emptyset = J_{i_0} \cap J_{i_1} \in \mathcal{U}$ következne, ami lehetetlen. Tehát legfeljebb egy i-re teljesülhet, hogy $J_i \in \mathcal{U}$.

Ugyanakkor van olyan i, melyre $J_i \in \mathcal{U}$ teljesül, ugyanis ellenkező esetben minden i-re $I - J_i \in \mathcal{U}$ következne, ami a DeMorgan azonosságok szerint $\mathcal{U} \not\ni I - J = \cap_{i \in n} I - J_i \in \mathcal{U}$ ellentmondáshoz vezetne. ∎

E bizonyítás ugyanazon az egyszerű gondolaton alapszik, amivel megmutattuk, hogy véges halmazok felett minden ultraszűrő főszűrő. Ennek megfelelően, a 2.5 tételből is könnyen következik, hogy véges halmaz felett minden ultraszűrő főszűrő: ha I véges halmaz, akkor a $J_a = \{a\}$ válsztással a $\{J_a : a \in I\}$ halmazrendszer eleget tesz a tétel feltételeinek.

2.2. Szűrőterek

Egy rögzített Boole-algebrabeli ultraszűrők összessége egy topologikus teret alkot. Ebben az alfejezetben e terekkel ismerkedünk meg. Többek között megmutatjuk, hogy ezek kompakt Hausdorff-terek.

2.6. Definíció. *Ha $\mathcal{B}$ egy Boole-algebra, akkor $U(\mathcal{B})$ jelöli a $\mathcal{B}$-beli ultraszűrők halmazát. Ha $\varepsilon \in B$ akkor $N_\varepsilon = \{x \in U(\mathcal{B}) : \varepsilon \in x\}$.*

Könnyen látható, hogy ha $\varepsilon, \delta \in B$ akkor
(1) $N_\varepsilon \cap N_\delta = N_{\varepsilon \wedge \delta}$,
(2) $\mathcal{U}(I) - N_\varepsilon = N_{-\varepsilon}$,
(3) $N_{0^\mathcal{B}} = \emptyset$ (hiszen $0^\mathcal{B}$ egyetlen $\mathcal{B}$-beli ultraszűrőnek sem eleme).
Ezek szerint az $\{N_\varepsilon : \varepsilon \subseteq I\}$ halmazrendszer véges metszetre zárt és így egy topológia bázisát alkotja. A generált τ topológiát nevezzük $\mathcal{B}$ Stone-terének. A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a Stone-térben a nyílt halmazok τ rendszere a következő.

$$\tau = \{\cup_{\varepsilon \in \Gamma} N_\varepsilon : \Gamma \subseteq B\}.$$

$\mathcal{B}$ Stone-tere tehát a $\mathcal{B}^* = \langle U(\mathcal{B}), \tau \rangle$ tér. Természetesen az N_ε halmazok nyíltak, ezeket elemi nyílt halmazoknak nevezzük. (2) miatt elemi nyílt halmazok komlementumai is (elemi) nyíltak.

2.7. Tétel. *Tetszőleges $\mathcal{B}$ Boole-algebra Stone-tere kompakt Hausdorff-tér.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy $\mathcal{B}^*$ Hausdorff-féle azaz bármely elempárja diszjunkt nyílt halmazokkal szétválasztható. Ha ugyanis x és y két különböző ultraszűrő B-ben, akkor van olyan $\varepsilon \in B$ melyre $\varepsilon \in x$ és $-\varepsilon \in y$. Vagyis $x \in N_\varepsilon$ és $y \in N_{-\varepsilon}$. Ezek szerint az $N_\varepsilon, N_{-\varepsilon}$ – melyek nyílt és diszjunkt halmazok – szétválasztják x-t és y-t.

Most azt mutatjuk meg, hogy $\mathcal{B}^*$ kompakt. Legyen H zárt halmazok egy véges metszet tulajdonságú rendszere, azt kell igazolni, hogy $\cap H \neq \emptyset$. (2) miatt a Stone-tér minden zárt részhalmaza elemi nyílt halmazok metszete, ezért a $H' = \{N_\varepsilon : (\exists h \in H) h \subseteq N_\varepsilon\}$ halmaz szintén véges metszet tulajdonságú és $\cap H = \cap H'$. Ezért (H-ról esetleg H'-re áttérve) feltehető, hogy H elemei elemi nyílt halmazok: $H = \{N_\varepsilon : \varepsilon \in \Gamma\}$. Itt $\Gamma \subseteq B$ és ha $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{n-1} \in \Gamma$, akkor

$\varepsilon_0 \wedge ... \wedge \varepsilon_{n-1}$ nem a nullelem (ellenkező esetben ugyanis H véges metszet tulajdonsága miatt $\emptyset \neq N_{\varepsilon_0} \cap ... \cap N_{\varepsilon_{n-1}} = N_{\varepsilon_0 \wedge ... \wedge \varepsilon_{n-1}} = N_{0^{\mathcal{B}}} = \emptyset$ ellentmondás következne). A 2.4 tétel (1) majd (2) pontja miatt Γ kietjeszthető egy x ultraszűrővé. Ekkor tetszőleges $N_\varepsilon \in H$-ra $\varepsilon \in \Gamma \subseteq x$ vagyis $x \in N_\varepsilon$, azaz $x \in \cap H$. ∎

2.8. Tétel. *A $\mathcal{B}$-beli x ultraszűrő akkor és csak akkor főszűrő, ha $\mathcal{B}^*$-nak izolált pontja.*

Bizonyítás. Ha x főszűrő, akkor van olyan $a \in B$ atom, melyre $x = \mathcal{F}_a$, ekkor az N_a egy olyan elemi nyílt halmaz, melynek egyetlen eleme x, vagyis x izolált pont. Fordítva, ha x izolált pont, akkor van olyan $\varepsilon \in B$, hogy N_ε egyetlen eleme x. Ugyanakkor az $\mathcal{F}_\varepsilon$ szűrőt tartalmazó összes ultraszűrő eleme N_ε-nak. Ezek szerint pontosan egy ultraszűrő van, ami $\mathcal{F}_\varepsilon$-t kiterjeszti, vagyis $\mathcal{F}_\varepsilon$ maga egy ultraszűrő. Végül x nyilvánvalóan egy $\mathcal{F}_\varepsilon$-t kiterjesztő ultraszűrő, azaz $x = \mathcal{F}_\varepsilon$, vagyis x főszűrő. ∎

Ezekből könnyen adódik, hogy ha $\mathcal{B}^*$ végtelen, akkor van nemfő ultraszűrő $\mathcal{B}$-ben. Ugyanis $\mathcal{B}^*$ kompakt tér, így ha végtelen, akkor van torlódási pontja (azaz olyan pont, melynek minden környezetében végtelen sok további pont van), ez a pont tehát nem izolált, vagyis nem főszűrő.

Ha $\mathcal{B}$ megszámlálható Boole-algebra, akkor $\mathcal{B}^*$ metrizálható: soroljuk fel tetszőleges sorrendben B elemeit, mondjuk $B = \{b_n : n \in \omega\}$ és legyen $\delta : {}^2(\mathcal{B}^*) \to \Re$ a következő függvény. Ha $x = y$ akkor legyen $\delta(x, y) = 0$. Ha $x \neq y$ akkor van olyan $n \in \omega$, hogy b_n x és y közül pontosan az egyiknek eleme. Ilyenkor azt mondjuk, hogy x és y b_n-nél eltér. Legyen $\delta(x, y) = 1/n$, ahol n az a legkisebb szám, melyre x és y eltér b_n-nél. Nyilvánvaló, hogy δ szimmetrikus, és pontosan akkor lesz 0 az eredmény, ha a két argumentum egyenlő. A háromszög egyenlőtlenség is teljesül, mert ha x és z b_n-nél eltér, akkor y vagy x-től vagy pedig z-től eltér b_n-nél, vagyis $\delta(x, z) \leq \delta(y, x)$ vagy $\delta(x, z) \leq \delta(y, z)$ és így $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$.

Könnyű átgondolni, hogy a δ által meghatározott topológia éppen a Stone-tér topológia. ezek szerint két ultraszűrő annál közelebb van egymáshoz δ szerint, minél hosszabb kezdőszeletet kell vennünk $\{b_0, b_1, b_2, ...\}$-ben, míg elérünk a két ultraszűrő közti első eltérésig.

2.3. Kombinatorikus alkalmazások

Az ultraszűrő(tere)knek sok kombinatorikus alkalmazása van, a kapcsolatok szisztematikus feltérképezése egy külön kutatási terület, mely jelenleg is aktív. Ebben a fejezetben két ilyen kombinatorikus alkalmazást mutatunk be.

Az első ezek közül a klasszikus Ramsey tételkör. Ezeket a tételeket sok más módon is lehet bizonyítani, az általunk adott bizonyítással elsősorban a szűrőterek egy érdekes alkalmazását szeretnénk bemutatni. Továbbá ezekre a tételekre később szükségünk is lesz.

A másik alkalmazás Hindman tételének Glazer-féle igazolása. A bizonyítást érdekessége miatt közöljük, Hindman tételére nem lesz szükségünk később.

2.9. Definíció. *Ha A halmaz, λ pedig számosság, akkor $[A]^\lambda$ jelöli A λ számosságú részhalmazainak halmazát.*

Az $f : [A]^n \to k$ alakú függvényeket az $[A]^n$ egy k-színezésének nevezzük. $B \subseteq A$ homogén az f-re nézve, ha f konstansfüggvény $[B]^n$-en.

Legyen most $f : [\omega]^n \to k$ egy színezés. $B \subseteq \omega$ prehomogén f-re nézve, ha tetszőleges $x \in [B]^{n-1}$-re, és x minden eleménél nagyobb $a, b \in B$-re $f(x \cup \{a\}) = f(x \cup \{b\})$.

2.10. Tétel. *Legyen $n, k \in \omega$, $n \geq 2, k \geq 1$ tetszőleges, és legyen $f : [\omega]^n \to k$ egy színezés. Ekkor van olyan végtelen $B \subseteq \omega$ mely prehomogén f-re.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{U}$ egy tetszőleges nemfő ultraszűrő ω-n. Rekurzióval megadunk egy növő $\langle b_i \in \omega : \ i \in \omega \rangle$ és egy csökkenő $\langle I_i \subseteq \omega : \ i \in \omega \rangle$ sorozatot úgy, hogy minden $i \in \omega$-ra teljesüljenek az alábbi kikötések:

$b_{i-1} < b_i$,

$I_{i-1} \supseteq I_i \in \mathcal{U}$,

$b_i \in I_i$ és

minden $x \in [\{b_j : j < i\}]^{n-1}$-re és minden $a, b \in I_i$-re $f(x \cup \{a\}) = f(x \cup \{b\})$.

E sorozatok kezdőszeletei legyenek a következők: $b_0 < \ldots < b_{n-2}$ tetszőleges és legyen $I_0 = \ldots = I_{n-2} = \omega$. Ezekre a kezdőszeletekre ($i \leq n-2$-ig) triviálisan teljesülnek a feltételek (az utolsó azért mert $\{b_0, \ldots, b_{n-3}\}$-nak nincs $n-1$ elemű részhalmaza). Tegyük fel, hogy minden $j < i$-re megadtuk már a feltételeknek eleget tevő b_j-t és I_j-t. Legyen a b_j-k maximuma c és minden c-nél nagyobb $d \in I_{i-1}$-re $f_d : [\{b_j : j < i\}]^{n-1} \to k$ legyen az a függvény, melyre $f_d(x) = f(x \cup \{d\})$. Egy $g : [\{b_j : j < i\}]^{n-1} \to k$ függvényre legyen $J_g = \{d \in I_{i-1} : d > c, g = f_d\}$. Mivel g-ből csak véges sok lehet, a J_g halmazok az $I_{i-1} \cap \{d \in \omega : d > c\} \in \mathcal{U}$ halmaz egy véges partícióját alkotják, ezért a 2.5 tétel miatt pontosan egy g-re lesz $J_g \in \mathcal{U}$. Legyen b_i ennek a J_g-nek egy tetszőleges eleme, és legyen $I_i = J_g$. Az utolsó indukciós feltevés kivételével mindegyik kikötésünk nyilvánvalóan teljesül. Ellenőrizzük az utolsó feltételt is: legyen $x \in [\{b_j : j < i\}]^{n-1}$ és legyen $a, b \in I_i$ tetszőleges. Ekkor $f(x \cup \{a\}) = f_a(x) = g(x) = f_b(x) = f(x \cup \{b\})$. Ezzel a sorozatokat definiáltuk.

Állítjuk, hogy a $B = \{b_i : \ i \in \omega\}$ prehomogén f-re nézve. Legyen ugyanis $x \in [B]^{n-1}$, mondjuk $x = \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_{n-1}}\}$ és legyenek $a, b \in B$ az x elemeinél nagyobb számok. Ekkor $a, b \in I_{i_{n-1}+1}$ miatt alkalmazható az utolsó indukciós kikötés, mely szerint $f(x \cup \{a\}) = f(x \cup \{b\})$, vagyis B prehomogén. ∎

2.11. Tétel. *(Ramsey.) Tetszőleges $n, k \in \omega, n, k \geq 1$-re és tetszőleges $f : [\omega]^n \to k$ színezéshez van végtelen halmaz, mely f szerint homogén.*

Bizonyítás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Az $n = 1$ (k tetszőleges) eset a skatulya elv miatt triviális. Tegyük most fel, hogy $n \geq 2$ és az állítás igaz $n - 1$-re és tetszőleges k-ra.

A 2.10 tétel miatt van olyan végtelen $B \subset \omega$ mely prehomogén f-re. Legyen $g : [B]^{n-1} \to k$ az a színezés, melyre $g(x) = f(x \cup \{a\})$, ahol $x \in [B]^{n-1}$ és $a \in B$ olyan elem, mely x minden eleménél nagyobb. Mivel B prehomogén f-re nézve, g eredménye nem függ a választásától, tehát g jóldefiniált. Az indukciós feltevés szerint van olyan végtelen $C \subseteq B$ részhalmaz, mely homogén g-re nézve. Megmutatjuk, hogy C f szerint is homogén. Legyen ugyanis $x, x' \in [C]^n$, legyenek x és x' legnagyobb elemei rendre a és a'. Ekkor

$$f(x) = g(x - \{a\}) = g(x' - \{a'\}) = f(x'),$$

azaz f valóban konstans $[C]^n$-en. ∎

Most rátérünk Hindman tételének bizonyítására, mely azt mondja ki, hogy akárhogyan is színezzük ω elemeit véges sok színnel, lesz olyan végtelen A halmaz, hogy az $\cup_{n\in\omega}\{a_0 + ... + a_{n-1} :\ a_0, ..., a_{n-1} \in A,\ a_0, ..., a_{n-1}$ páronként különböző $\}$ halmaz homogén.

Hasznos lesz a következő jelölés. Ha $x = \{x_0, ..., x_{n-1}\} \in [\omega]^{<\omega}$ akkor $\Sigma(x) = x_0 + ... + x_{n-1}$ ($\Sigma(\emptyset)$-t 0-nak tekintjük). Folkman egy korábbi eredménye szerint ω elemeinek tetszőleges színezése esetén tetszőlegesen nagy $k \in \omega$-ra van olyan legalább k elemű $A \subseteq \omega$, hogy a $\{\Sigma(x) :\ x \subseteq A\}$ halmaz homogén. Ez a gyengébb állítás sem triviális. Hindman tétele ennél jóval többet állít: nem csak tetszőlegesen nagy, de véges halmazok vannak, melyek összeghalmaza homogén, hanem végtelen ilyen halmaz is van.

A Glazertől származó alábbi bizonyításhoz egy sor lemmán át vezet az út. Először is, ha $A \subseteq \omega$ és $n \in \omega$ akkor használni fogjuk az $(A) - n = \{x \in \omega :\ x + n \in A\}$ jelölést. Továbbá $\mathbf{N}$ jelöli a pozitív egész számok halmazát (tehát $\mathbf{N} = \omega - \{0\}$).

2.12. Definíció. *Legyen* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{U}(\mathbf{N})$. *Ekkor*

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} = \{A \subseteq \mathbf{N} :\ \{n \in \mathbf{N} : (A) - n \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}\}.$$

2.13. Lemma.

(1) $\mathcal{U}(\mathbf{N})$ *zárt* $\oplus$*-ra.*

(2) A $\oplus$ *művelet asszociatív.*

(3) A $\oplus$ *művelet (a Stone-topológiában) folytonos az 1. változójában.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{U}(\mathbf{N})$, (1)-hez azt kell igazolnunk, hogy $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \in \mathcal{U}(\mathbf{N})$. Figyeljük meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbf{N}$-re $(\mathbf{N}) - n = \mathbf{N}$ illetve $(\emptyset) - n = \emptyset$. Ezért minden $n \in \mathbf{N}$-re $(\mathbf{N}) - n \in \mathcal{G}$ és $(\emptyset) - n \notin \mathcal{G}$ vagyis $\mathbf{N} \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ (tehát $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ nem az üreshalmaz) továbbá $\emptyset \notin \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$. Tegyük fel, hogy $A \subseteq B$. Ekkor tetszőleges n-re $(A) - n \subseteq (B) - n$. Ezért $\{n \in \mathbf{N}: \ (A) - n \in \mathcal{G}\} \subseteq \{n \in \mathbf{N}: \ (B) - n \in \mathcal{G}\}$. Tehát, ha $A \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, akkor $B \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ is teljesül, vagyis $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ felszálló. Legyen most $A, B \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, megmutatjuk, hogy ekkor $A \cap B$ is $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$-beli. Feltevésünk szerint $\{n \in \mathbf{N}: \ (A) - n \in \mathcal{G}\}$ és $\{n \in \mathbf{N}: \ (B) - n \in \mathcal{G}\}$ egyaránt $\mathcal{F}$-beli halmazok, így metszetük is $\mathcal{F}$-beli. De

$$\begin{aligned}
&\{n \in \mathbf{N}: \ (A) - n \in \mathcal{G}\} \cap \{n \in \mathbf{N}: \ (B) - n \in \mathcal{G}\} = \\
&\{n \in \mathbf{N}: (A) - n, (B) - n \in \mathcal{G}\} = \\
&\{n \in \mathbf{N}: (A) - n \cap (B) - n \in \mathcal{G}\} = \\
&\{n \in \mathbf{N}: (A \cap B) - n \in \mathcal{G}\}
\end{aligned}$$

ezért ez utóbbi halmaz is $\mathcal{F}$-beli, vagyis $A \cap B \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$. Végül legyen $A \subseteq \mathbf{N}$ és $n \in \omega$. Ekkor

$$\mathbf{N} - [(A) - n] = \{k \in \mathbf{N} : k + n \notin A\} = \{k \in \mathbf{N} : k + n \in \mathbf{N} - A\} = (\mathbf{N} - A) - n.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
&A \notin \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \Leftrightarrow \\
&\{n \in \mathbf{N} : (A) - n \in \mathcal{G}\} \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{n \in \mathbf{N} : (A) - n \notin \mathcal{G}\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{n \in \mathbf{N} : \mathbf{N} - [(A) - n] \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{n \in \mathbf{N} : (\mathbf{N} - A) - n \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&(\mathbf{N} - A) \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}.
\end{aligned}$$

Tehát $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ valóban ultraszűrő.

(2) igazolásához tegyük fel, hogy $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{U}(\mathbf{N})$ és legyen $A \subseteq \mathbf{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}
&A \in (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}) \oplus \mathcal{H} \Leftrightarrow \\
&\{n \in \mathbf{N}: \ (A) - n \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \Leftrightarrow \\
&\{m \in \mathbf{N}: \ (\{n \in \mathbf{N}: \ (A) - n \in \mathcal{H}\}) - m \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{m \in \mathbf{N}: \ \{n \in \mathbf{N}: \ (A) - n - m \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{m \in \mathbf{N}: \ \{n \in \mathbf{N}: \ ((A) - m) - n \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{m \in \mathbf{N}: \ (A) - m \in \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&A \in \mathcal{F} \oplus (\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}).
\end{aligned}$$

(3) igazolásához végül legyen $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{U}(\mathbf{N})$ és legyen N_ε egy $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$-t tartalmazó tetszőleges elemi nyílt halmaz. Ekkor $\varepsilon \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ azaz

$$(*) \qquad \{n \in \mathbf{N}: \ (\varepsilon) - n \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}.$$

Legyen $\delta = \{n \in \mathbf{N} : (\varepsilon) - n \in \mathcal{G}\}$, ekkor N_δ az $\mathcal{F}$ egy környezete, és minden $\mathcal{F}' \in N_\delta$-ra $(*)$ miatt $\varepsilon \in \mathcal{F}' \oplus \mathcal{G}$ azaz $\mathcal{F}' \oplus \mathcal{G} \in N_\varepsilon$ is teljesül, vagyis a $\oplus_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{G}$ függvény folytonos $\mathcal{F}$-ben. ∎

Az $\langle A, \cdot, \tau\rangle$ struktúrákat kompakt félcsoportoknak nevezzük, ha $\langle A, \cdot\rangle$ egy félcsoport, $\langle A, \tau\rangle$ kompakt Hausdorff-tér és tetszőleges $a \in A$-ra az $f_a : A \to A$, $f_a(x) = x \cdot a$ függvény folytonos. Ezek szerint tehát $\langle \mathcal{U}(\mathbf{N}), \oplus, \tau\rangle$ (itt τ a Stone-topológiát jelöli) egy kompakt félcsoport.

2.14. Tétel. *(Idempotenstétel.) Ha $\langle A, \cdot, \tau\rangle$ egy kompakt félcsoport, akkor van benne idempotens elem (azaz van olyan $a \in A$ melyre $a \cdot a = a$).*

Bizonyítás. Először is emlékeztetünk rá, hogy Hausdorff-terekben kompakt halmaz folytonos képe kompakt és egy kompakt Hausdorff-tér egy részhalmaza akkor és csak akkor zárt, ha kompakt. Ezért kompakt Hausdorff-terekben zárt halmaz folytonos képe zárt.

Legyen X az A (topológiai értelemben) zárt részfélcsoportjainak halmaza, X-et a halmazelméleti tartalmazás részbenrendezi. Ha H (a tartalmazás szerint) egy lineárisan rendezett részhalmaza X-nek, akkor $\cap H$ nemüres (mert a lineáris rendezettség miatt H véges metszet tulajdonságú, H elemei zárt halmazok így ezek metszete a tér kompaktsága miatt nem üres). Ezért $\cap H$ szintén zárt félcsoport. Azt kaptuk, hogy X minden lineárisan rendezett részhalmazának van X-beli alsó korlátja, így a Zorn-lemma (duálisa) miatt van minimális elem X-ben, legyen ez B és legyen $g \in B$ tetszőleges. Ekkor a Bg komplexus szintén félcsoport, mert ha $a, b \in B$ akkor $(ag)(bg) = (agb)g$ és itt $agb \in B$ tehát $(ag)(bg) \in Bg$. Továbbá az $f_g(x) = xg$ folytonos függvény A-n és Bg a zárt B f_g szerinti (folytonos) képe, így Bg is zárt félcsoport. Viszont $g \in B$ miatt $Bg \subseteq B$, ami B minimalitása miatt csak úgy lehet, ha $B = Bg$. Legyen végül $C = \{a \in B : ag = g\}$. Mivel $g \in B = Bg$, ezért $C \neq \emptyset$ és C az egyelemű és ezért (Hausdorff-terünkben) zárt $\{g\}$ halmaz a folytonos f_g szerinti inverz képe, ezért C is zárt halmaz. Ha $a, b \in C$, akkor $(ab)g = a(bg) = ag = g$, vagyis $ab \in C$, tehát C is részfélcsoportja A-nak. Ugyanakkor $C \subseteq B$ ami csak úgy lehet, ha $C = B$. Ezek szerint $g \in B = C$, azaz $gg = g$ a keresett idempotens elem. ∎

2.15. Következmény. *Van olyan $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(\mathbf{N})$, melyre $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F} = \mathcal{F}$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.14 tételt az $\langle \mathcal{U}(\mathbf{N}), \oplus, \tau\rangle$ kompakt félcsoportra. ∎

Ezek után könnyen igazolhatjuk Hindman tételét.

2.16. Tétel. *(Hindman.) Legyen $k \in \mathbf{N}$ és $f : \omega \to k$ tetszőleges. Ekkor van olyan $A \in [\omega]^\omega$, melyre $\{\Sigma(x) : x \in [A]^{<\omega}\}$ homogén halmaz.*

Bizonyítás.(Glazer.) Rögzítsünk $\mathbf{N}$-en egy olyan (a 2.15 következmény szerint létező) $\mathcal{F}$ ultraszűrőt, melyre $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F} = \mathcal{F}$. Ez nem lehet főszűrő, mert tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén $\mathcal{F}_n \oplus \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{2n} \neq \mathcal{F}_n$ (az utolsó egyenlőtlenség nem teljesül $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{U}(\omega)$ esetében, ez az oka annak, hogy a Hindman-tétel tárgyalásának elején áttértünk $\mathcal{U}(\mathbf{N})$-re). Ha most $A \subseteq \mathbf{N}$, akkor legyen $A' = \{n \in \mathbf{N} : (A) - n \in \mathcal{F}\}$. Mivel $\mathcal{F} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}$, ezért $A \in \mathcal{F}$-ből $A' \in \mathcal{F}$ következik.

Legyen minden $i \in k$-ra $J_i = \{n \in \mathbf{N} : f(n) = i\}$. Ekkor $\{J_i : i \in k\}$ az $\mathbf{N}$ egy véges partíciója, ezért a 2.5 tétel miatt pontosan egy $i \in k$-ra teljesül, hogy $J_i \in \mathcal{F}$. Ezt rövidebben úgy is fogalmazhatjuk, hogy $\mathbf{N}$ ($\mathcal{F}$ szerint)-majdnem minden elemének i a színe. Legyen $a_0 \in J_i \cap J_i'$ tetszőleges. Ekkor $a_0 \in J_i'$ miatt $(J_i) - a_0 \in \mathcal{F}$.

Tegyük most fel, hogy adottak már az $a_0 < ... < a_{n-1} \in \mathbf{N}$ számok úgy, hogy minden $x \subseteq \{a_0, ..., a_{n-1}\}$-re

$$(*) \qquad (J_i) - \Sigma(x) \in \mathcal{F}.$$

Ezek szerint az is teljesül minden $x \subseteq \{a_0, ..., a_{n-1}\}$-re, hogy $((J_i) - \Sigma(x))' \in \mathcal{F}$. Legyen

$$(**) \qquad a_n \in \cap_{x \subseteq \{a_0,...,a_{n-1}\}} (J_i) - \Sigma(x) \quad \cap \quad \cap_{x \subseteq \{a_0,...,a_{n-1}\}} ((J_i) - \Sigma(x))'$$

tetszőleges olyan elem, mely minden $\{a_0, ..., a_{n-1}\}$-nél nagyobb (ilyen van, mert az előbbi metszet $\mathcal{F}$-beli és $\mathcal{F}$ nem főszűrő). Világos, hogy $(*)$ érvényben marad minden $x \subseteq \{a_0, ..., a_n\}$-re is: ha ugyanis x egy ilyen halmaz és $a_n \notin x$, akkor $(*)$ igazságát feltettük. Különben $x = y \cup \{a_n\}$ valamilyen $y \subseteq \{a_0, ..., a_{n-1}\}$-ra. De $(*)$ miatt $(J_i) - \Sigma(y) \in \mathcal{F}$ és a konstrukció miatt $a_n \in ((J_i) - \Sigma(y))'$ ezért $(J_i) - \Sigma(x) = ((J_i) - \Sigma(y)) - a_n \in \mathcal{F}$, ahogy állítottuk.

Legyen $A = \{a_n : n \in \omega\}$. Megmutatjuk, hogy A olyan végtelen homogén halmaz, melyre a $\{\Sigma(x) : x \in [A]^{<\omega}\}$ halmaz is homogén. A végtelen halmaz, mert a kiválsztott sorozat szigorúan növő. Továbbá minden $n \in \omega$-ra $a_n \in J_i$, ezért A homogén: minden eleme „i" színű. Legyen most $x = \{a_{n_0}, ..., a_{n_k}\} \subseteq A$ véges halmaz, melynek legnagyobb eleme a_{n_k}. Ekkor $(**)$ miatt $a_{n_k} \in (J_i) - \Sigma(\{a_{n_0}, ..., a_{n_{k-1}}\})$ azaz $\Sigma(x) = a_{n_k} + \Sigma(\{a_{n_0} + ... + a_{n_{k-1}}\}) \in J_i$, melynek minden eleme i-színű. ∎

A bizonyítással egy picit többet is sikerült igazolni. Van olyan $\mathcal{F}$ (a színezéstől nem is függő !) ultraszűrő, hogy az $\mathcal{F}$ szerinti leggyakoribb színű elemekből kiválaszthatunk egy végtelen részhalmazt, melynek összeghalmaza homogén.

2.4. Ultraszorzatok és alaptulajdonságaik

Ebben az alfejezetben ismertetjük az ultraszorzat konstrukciót, mely a modellelmélet egyik alapvető fontosságú technikája. Többek között igazoljuk majd a Kompaktsági Tételt, mely szerint egy (végtelen) formulahalmaznak akkor és csak akkor van modellje, ha minden véges részének van modellje. A további, modellelméleten, logikán kívüli alkalmazások előkészítéseképpen megmutatjuk, hogy minden struktúra beágyazható végesen generált részstruktúráinak egy alkalmas ultraszorzatába. Lśsuk tehát a részleteket.

Rögzítsünk egy L elsőrendű nyelvet. Legyen I indexhalmaz, legyen $\mathcal{F}$ szűrő I felett, továbbá legyen minden $i \in I$-re $\mathcal{A}_i$ egy L-struktúra. Definiáljuk a $\Pi_{i \in I} A_i$ direktszorzaton a $\sim_{\mathcal{F}}$ relációt úgy, hogy tetszőleges $s, z \in \Pi_{i \in I} A_i$ re $s \sim_{\mathcal{F}} z$ akkor és csak akkor álljon fenn, ha

$$\{i \in I : \ s(i) = z(i)\} \in \mathcal{F}$$

teljesül. Tehát két direktszorzatbeli kiválasztási függvény akkor és csak akkor van $\sim_{\mathcal{F}}$ relációban, ha értékeik $\mathcal{F}$ szerint majdnem mindenütt megegyeznek.

Most megmutatjuk, hogy $\sim_{\mathcal{F}}$ egy ekvivalenciareláció, sőt, kompatibilis minden koordinátánként definiált függvénnyel és relációval.

2.17. Lemma. *Az előző jelöléseket megtartva,*

(1) $\sim_{\mathcal{F}}$ *egy ekvivalenciareláció.*

(2) Ha f n*-változós függvényszimbólum* L*-ben,* $s_0, ..., s_{n-1}, z_0, ..., z_{n-1} \in \Pi_{i \in I} A_i$ *és* $s_0 \sim_{\mathcal{F}} z_0, ..., s_{n-1} \sim_{\mathcal{F}} z_{n-1}$*, akkor*

$$f^{\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i}(s_0, ..., s_{n-1}) \sim_{\mathcal{F}} f^{\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i}(z_0, ..., z_{n-1}).$$

(3) Ha R m*-változós relációszimbólum* L*-ben,* $s_0, ..., s_{m-1}, z_0, ..., z_{m-1} \in \Pi_{i \in I} A_i$ *és* $s_0 \sim_{\mathcal{F}} z_0, ..., s_{m-1} \sim_{\mathcal{F}} z_{m-1}$*, akkor*

$$\{i \in I : \ R^{\mathcal{A}_i}(s_0(i), ..., s_{m-1}(i))\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \{i \in I : \ R^{\mathcal{A}_i}(z_0(i), ..., z_{m-1}(i))\} \in \mathcal{F}.$$

Bizonyítás. (1) A reflexivitás és a szimmetria nyilvánvaló. A tranzitivitás igazolásához tegyük fel, hogy $s \sim_{\mathcal{F}} z \sim_{\mathcal{F}} y$ és legyen $J = \{i \in I : \ s(i) = z(i)\}, \quad K = \{i \in I : z(i) = y(i)\}$. Ekkor $J, K \in \mathcal{F}$, ezért

$$\{i \in I : \ s(i) = y(i)\} \supseteq J \cap K \in \mathcal{F}$$

miatt $s \sim_{\mathcal{F}} y$.

(2) Legyen $J_k = \{i \in I : \ s_k(i) = z_k(i)\}$, feltevésünk szerint ekkor minden $k \in m$-re $J_k \in \mathcal{F}$, és így $J = \cap_{k \in m} J_k \in \mathcal{F}$. Vegyük észre, hogy tetszőleges $i \in J$-re $s_0(i) = z_0(i), ..., s_{m-1}(i) = z_{m-1}(i)$ és emiatt $f^{\mathcal{A}_i}(s_0(i), ..., s_{m-1}(i)) = f^{\mathcal{A}_i}(z_0(i), ..., z_{m-1}(i))$ azaz

$$\begin{aligned} \{i \in I : \ f^{\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i}(s_0, ..., s_{n-1})(i) = f^{\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i}(z_0, ..., z_{n-1})(i)\} \quad &= \\ \{i \in I : \ f^{\mathcal{A}_i}(s_0(i), ..., s_{n-1}(i)) = f^{\mathcal{A}_i}(z_0(i), ..., z_{n-1}(i))\} \quad &\supseteq \quad J \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Ezért valóban $f^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}(s_0, ..., s_{n-1}) \sim_{\mathcal{F}} f^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}(z_0, ..., z_{n-1})$.

(3) igazolása teljesen hasonló. ∎

A továbbiakban egy $s \in \Pi_{i\in I}A_i$ elem $\sim_{\mathcal{F}}$ szerinti ekvivalenciaosztályát $s/\mathcal{F}$-el jelöljük.

2.18. Definíció. *Legyen $\langle \mathcal{A}_i, i \in I\rangle$ L-struktúrák egy rendszere és legyen $\mathcal{F}$ szűrő I felett. Ekkor a $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}$ redukált szorzat az a struktúra, melynek alaphalmaza a $\Pi_{i\in I}A_i$ direktszorzat $\sim_{\mathcal{F}}$ szerinti ekvivalenciaosztályaiból áll, és*

- *ha c egy L-beli konstansszimbólum, akkor $c^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}} = c^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}/\mathcal{F}$,*
- *ha f egy n-változós függvényszimbólum L-ben, akkor*

$$f^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}(s_0/\mathcal{F}, ..., s_{n-1}/\mathcal{F}) = f^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}(s_0, ..., s_{n-1})/\mathcal{F},$$

- *ha R egy m-változós relációszimbólum L-ben, akkor $R^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}(s_0/\mathcal{F}, ..., s_{n-1}/\mathcal{F})$ pontosan akkor áll fenn, ha*

$$\{i \in I:\ R^{\mathcal{A}_i}(s_0(i), ..., s_{m-1}(i))\} \in \mathcal{F}$$

teljesül. Ha $\mathcal{F}$ ultraszűrő, akkor a megfelelő redukált szorzatokat ultraszorzatnak nevezzük.

A 2.17 lemmában pont azt mutattuk meg, hogy az előző definícióban a redukált szorzatbeli függvények értéke és relációk igazsága nem függ attól, milyen reprezentánsokat választunk az argumentumaikban szereplő $\sim_{\mathcal{F}}$-osztályokból. Ezért a 2.18 definíció értelmes, és a bevezetett jelöléssel összhangban úgy is fogalmazhatunk, hogy a redukált szorzat a direktszorzat $\mathcal{F}$ szerinti (pontosabban $\sim_{\mathcal{F}}$ szerinti) faktorstruktúrája.

Ennek megfelelően, ha k a nyelv változóinak egy direktszorzat feletti értékelése, akkor $k/\mathcal{F}$-el jelöljük azt a redukált szorzat feletti értékelést, melyre teljesül, hogy minden v változóra $k/\mathcal{F}(v) = k(v)/\mathcal{F}$. Fordítva, így az összes redukált szorzat feletti értékelést megkapjuk, ugyanis ha l egy redukált szorzat feletti tetszőleges értékelés, akkor a változók értékeiből, mint $\sim_{\mathcal{F}}$ ekvivalenciaosztályokból tetszőleges módon reprezentánsokat válsztva egy olyan direktszorzat feletti k értékelést kapunk, melyre $k/\mathcal{F} = l$. Továbbá, ha k a $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i$ direktszorzat feletti értékelés, akkor adott $i \in I$-re k_i jelöli az i. vetületértékelést, ami az az $\mathcal{A}_i$ feletti értékelés, melyre tetszőleges v változó esetén teljesül, hogy $k_i(v) = k(v)(i)$.

Az ultraszorzat konstrukció jelentőségét az alábbi tétel is alátámasztja. Ezt a tételt szokás Łoś-lemmának, illetve az ultraszorzatok alaptételének is nevezni.

2.19. Tétel. *(Łoś) . Legyen $\langle \mathcal{A}_i : i \in I\rangle$ L-struktúrák egy rendszere, legyen $\mathcal{F}$ ultraszűrő I felett és legyen k tetszőleges értékelés $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i$ felett. Ekkor*

(1) Az L nyelv tetszőleges, mondjuk n változós t termjére

$$t^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}[k/\mathcal{F}] = (t^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}[k])/\mathcal{F}.$$

(2) Az L nyelv tetszőleges φ formulájára

$$\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi[k/\mathcal{F}] \;\Leftrightarrow\; \{i \in I :\; \mathcal{A}_i \models \varphi[k_i]\} \in \mathcal{F}.$$

(3) Az L nyelv tetszőleges φ formulájára

$$\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \{i \in I :\; \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{F}.$$

(2) szerint egy formula egy értékelés esetén akkor és csak akkor igaz az ultraszorzatban, ha a változók értékeiből tetszőleges módon reprezentánsokat választva a formula $\mathcal{F}$ szerint majdnem minden koordinátastruktúrában igaz a megfelelő vetületértékelés mellett. Hasonlóan, (3) szerint egy formula akkor és csak akkor igaz az ultraszorzaton, ha majdnem minden koordinátastruktúrában igaz.

Bizonyítás. (1) igazolásához a termek összetettségére vonatkozó indukciót alkalmazunk. Ha t az L konstansszimbóluma vagy függvényszimbóluma, akkor (1) igaz, mert az ultraszorzatban a konstansszimbólumok illetve függvényszimbólumok interpretációit pont így definiáltuk. Tegyük most fel, hogy $t = f(t_0, ..., t_{n-1})$ és (1) igaz a $t_0, ..., t_{n-1}$ termekre. Ekkor

$$\begin{aligned}
&t^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}[k/\mathcal{F}] = \\
&f^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}(t_0^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}[k/\mathcal{F}], ..., t_{n-1}^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}[k/\mathcal{F}]) \stackrel{*}{=} \\
&f^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}(t_0^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}[k]/\mathcal{F}, ..., t_{n-1}^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}[k]/\mathcal{F}) = \\
&f^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}(t_0^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}, ..., t_{n-1}^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i})[k]/\mathcal{F} = \\
&t^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}[k]/\mathcal{F}
\end{aligned}$$

ahogy állítottuk. $*$ az indukciós feltevés miatt igaz, a következő egyenlőség pedig az ultraszorzatok definíciója miatt.

(2) Igazolásához φ összettsége szerinti indukciót alkalmazunk. Először tegyük fel, hogy $\varphi = R(t_0, ..., t_{n-1})$ atomi formula ($t_0, ..., t_{n-1}$ termek). Ekkor (1) miatt és amiatt, ahogy az ultraszorzatokon definiáltuk az alaprelációkat,

$$\begin{aligned}
&\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i \models \varphi[k/\mathcal{F}] \Leftrightarrow \\
&R^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}(t_0^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}[k/\mathcal{F}], ..., t_{n-1}^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}[k/\mathcal{F}]) \Leftrightarrow \\
&R^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}}(t_0^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}[k]/\mathcal{F}, ..., t_{n-1}^{\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i}[k]/\mathcal{F}) \Leftrightarrow \\
&\{i \in I :\; R^{\mathcal{A}_i}(t_0^{\mathcal{A}_i}[k_i], ..., t_{n-1}^{\mathcal{A}_i}[k_i])\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in I :\; \mathcal{A}_i \models \varphi[k_i]\} \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Tegyük most fel, hogy (2) igaz *tetszőleges* k értékelés mellett a φ és ψ formulákra. Belátjuk, hogy ekkor (2) igaz marad a $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \exists v_j\varphi$ formulákra is (megint $*$-al jelöljük majd azokat a pontokat, ahol indukciós feltevésünket használjuk).

Ha (2) tetszőleges k mellett igaz φ-re, akkor $\neg\varphi$-re is:

$$\begin{aligned}
&\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \models \neg\varphi[k/\mathcal{F}] \Leftrightarrow \\
&\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \not\models \varphi[k/\mathcal{F}] \overset{*}{\Leftrightarrow} \\
&\{i \in I: \ \mathcal{A}_i \models \varphi[k/\mathcal{F}]\} \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in I: \ \mathcal{A}_i \not\models \varphi[k/\mathcal{F}]\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in I: \ \mathcal{A}_i \models \neg\varphi[k/\mathcal{F}]\} \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Ha (2) tetszőleges k mellett igaz φ-re és ψ-re, akkor $\varphi \wedge \psi$-re is:

$$\begin{aligned}
&\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi \wedge \psi[k/\mathcal{F}] \Leftrightarrow \\
&\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi[k/\mathcal{F}], \psi[k/\mathcal{F}] \overset{*}{\Leftrightarrow} \\
&\{i \in I: \ \mathcal{A}_i \models \varphi[k_i]\}, \{i \in I: \mathcal{A}_i \models \psi[k_i]\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in I: \ \mathcal{A}_i \models \varphi[k_i]\} \cap \{i \in I: \mathcal{A}_i \models \psi[k_i]\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in I: \ \mathcal{A}_i \models \varphi[k_i], \psi[k_i]\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in I: \ \mathcal{A}_i \models \varphi \wedge \psi[k_i]\} \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Alább alkalmazni fogjuk a következő jelölést. Ha k egy értékelés és v egy változó, akkor k_a^v azt az értékelést jelöli, mely v-t a-ra képezi, a többi változót pedig oda, ahova k. Ha (2) tetszőleges k értékelés mellett igaz φ-re, akkor $\exists v_j\varphi$-re is:

$$\begin{aligned}
&\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \models \exists v_j\varphi[k/\mathcal{F}] \Leftrightarrow \\
&\text{Van } s \in \Pi_{i\in I}A_i, \text{ hogy } \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi[k_s^{v_j}/\mathcal{F}] \overset{*}{\Leftrightarrow} \\
&\text{Van } s \in \Pi_{i\in I}A_i, \text{ hogy } \{i \in I: \ \mathcal{A}_i \models \varphi[(k_i)_{s(i)}^{v_j}]\} \in \mathcal{F} \overset{**}{\Rightarrow} \\
&\{i \in I: \ \mathcal{A}_i \models \exists v_j\varphi[k_i]\} \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

A $**$ lépésben is megfordítható az implikácıó, hiszen adott i-re legyen $X_i \subseteq A_i$ az olyan s elemek halmaza, melyekre $\mathcal{A}_i \models \varphi[(k_i)_s^{v_j}]$. Az utolsó sor szerint majdnem minden $i \in I$-re X_i nemüres halmaz. Ezért a kiválasztási axióma miatt van olyan $s \in \Pi_{i\in I}A_i$, melyre teljesül, hogy ha $X_i \neq \emptyset$ akkor $s_i \in X_i$, ezzel az s-el nyilván teljesül a $**$-os implikáció előtti feltétel. Ezzel (2)-t beláttuk.

(3) igazolásához először tegyük fel, hogy φ majdnem mindegyik koordinátastruktúrában igaz, azaz $\{i \in I: \ \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{F}$. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges, $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i$ feletti k értékelés esetén $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi[k/\mathcal{F}]$. Rögzítsünk egy ilyen k-t, ekkor (2) szerint elég megmutatni, hogy $\{i \in I: \ \mathcal{A}_i \models \varphi[k_i]\} \in \mathcal{F}$, de ez nyilvánvaló a bekezdés elején feltételezett állítás miatt. A fordított irányú implikáció ellenőrzéséhez most tegyük fel, hogy $\mathrm{J} = \{i \in I: \ \mathcal{A}_i \models \varphi\} \notin \mathcal{F}$. Ekkor minden $i \in I - J$-hez van olyan k_i értékelés, melyre $\mathcal{A}_i \not\models \varphi[k_i]$, a többi

$i \in J$-re legyen k_i tetszőleges értékelés $\mathcal{A}_i$ felett. Legyen k az a direktszorzat feletti értékelés, melynek vetületértékelései minden $i \in I$-re az előbbi k_i-k. Ekkor tehát $\mathcal{F} \ni I - J = \{i \in I : \mathcal{A}_i \not\models \varphi[k_i]\}$, ezért (2) szerint $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \not\models \varphi[k/\mathcal{F}]$, vagyis φ nem igaz az ultraszorzatban. Ezzel (3)-at, és így az egész tételt igazoltuk. ∎

Figyeljük meg, hogy az előbbi bizonyításban egyetlen helyen használtuk ki, hogy $\mathcal{F}$ ultraszűrő: ha csak annyit tételezünk fel, hogy $\mathcal{F}$ szűrő, akkor az előbbi érvelés megismételhető, kivéve az összetettség szerinti indukcióban azt a lépést melyben φ-ről $\neg\varphi$-re tértünk át. Meg lehet mutatni, hogy ha $\varphi = Q_0v_0...Q_{n-1}v_{n-1}\psi$ prenex formula, ahol ψ (atomi formulákból álló) implikációs formula, akkor redukált szorzatok esetében is igaz marad, hogy ha majdnem minden $i \in I$-re $\mathcal{A}_i \models \varphi$ akkor $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi$. Az 1970-es években sokat vizsgált kérdés volt, hogy pontosan melyek azok az elsőrendű formulák, melyek igazságát a redukált szorzat az előbbi értelemben megtartja. A kérdést sikerült tisztázni, a részletekkel kapcsolatban [3]-ra utalunk.

Feladat. Ha $\mathcal{A}$ véges struktúra, akkor izomorf minden ultrahatványával.

2.5. Reguláris szűrők és axiomatizálhatóság

Ebben az alfejezetben megmutatjuk az ultraszorzatok néhány modellelméleten, logikán belüli alkalmazását. Azt a kérdést vizsgáljuk, hogy egy modellosztály mikor axiomatizálható elsőrendű formulákkal, véges sok elsőrendű formulával, illetve univerzális formulákkal. Durván szólva (és kissé pontatlanul), az axiomatizálható modellosztályok azzal jellemezhetők, hogy az ultraszorzat „nem vezet ki belőlük”. E jellemzéshez szükségünk lesz a következő, speciális tulajdonságú (ultra)szűrőkre.

2.20. Definíció. *Legyen $\mathcal{F}$ szűrő az I halmaz felett, és legyen κ számosság. Azt mundjuk, hogy $\mathcal{F}$ κ-reguláris, ha van olyan $E \subseteq \mathcal{F}$, hogy $|E| = \kappa$ és minden $i \in I$-re $\{e \in E : i \in e\}$ véges halmaz. Továbbá $\mathcal{F}$ reguláris, ha $|I|$-reguláris.*

2.21. Tétel.

(1) Ha $\mathcal{F}$ κ-reguláris szűrő, $\lambda \leq \kappa$, akkor $\mathcal{F}$ λ-reguláris is.

(2) Ha κ végtelen számosság, akkor van κ-reguláris ultraszűrő minden κ számosságú halmazon.

(3) Egyetlen κ számosságú végtelen halmazon sincs κ^+-reguláris szűrő.

Bizonyítás. (1) nyilvánvaló. (2) igazolásához rögzítsük κ-t, elég megmutatni, hogy van κ számosságú halmaz, mely felett van κ-reguláris ultraszűrő (miért?). Legyen $I = [\kappa]^{<\omega}$ és minden $a \in \kappa$-ra legyen $\hat{a} = \{b \in I : a \in b\}$. Ekkor $|I| = \kappa$. Ezenkívül, a $J = \{\hat{a} : a \in \kappa\}$ halmazrendszer véges metszet tulajdonságú, ugyanis, ha $a_0, ..., a_{n-1} \in \kappa$ akkor $\hat{a}_0 \cap ... \cap \hat{a}_{n-1} \ni \{a_0, ..., a_{n-1}\}$. A 2.4 tétel miatt van tehát

J-t kiterjesztő ultraszűrő, legyen ez $\mathcal{F}$. Belátjuk, hogy $\mathcal{F}$ κ-reguláris. Ezt a J halmazrendszer tanúsítja: $|J| = \kappa$, hiszen $\hat{a} \neq \hat{c}$, ha $a \neq c \in \kappa$. Ugyanakkor tetszőleges $b \in J$-re $|\{\hat{a} : b \in \hat{a}\}| = |\{\hat{a} : a \in b\}| = |b|$, és ez utóbbi véges.

(3) igazolásához tegyük fel, hogy $E \subseteq \mathcal{F}$ úgy, hogy minden $a \in I$-re

$$(*) \qquad \{e \in E : a \in e\} \qquad \text{véges halmaz.}$$

Legyen $f : E \to I$ olyan függvény, melyre igaz, hogy minden $e \in E$-re $f(e) \in e$ ($E \subseteq \mathcal{F}$ miatt egyetlen $e \in E$ sem üres, tehát a kiválasztási axióma miatt van megfelelő f). $(*)$ miatt minden $a \in I$-re $|f^{-1}(a)| < \aleph_0$, ezért $|E| = |dom(f)| \leq |I|\aleph_0 = |I|$, vagyis $\mathcal{F}$ nem lehet $|I|^+$-reguláris. ∎

Ezek szerint egy reguláris ultraszűrő annyira reguláris, amennyire csak lehet.

Feladatok. 1. Igazoljuk, hogy egyetlen főszűrő sem $\aleph_0$-reguláris.
2. Igazoljuk, hogy ω-n minden nemfő szűrő reguláris.

2.22. Tétel. *(Kompaktsági tétel.)*

(1) Ha a Γ elmélet minden véges részhalmazának van modellje, akkor Γ-nak is van modellje.

(2) Tegyük fel, hogy Γ egy elmélet, és minden $\gamma \in [\Gamma]^{<\omega}$-ra $\mathcal{A}_\gamma \models \gamma$. Ekkor az $\{\mathcal{A}_\gamma : \gamma \in [\Gamma]^{<\omega}\}$ struktúrák egy alkalmas ultraszorzata modellje Γ-nak.

Bizonyítás. (2) többet állít, mint (1): ha Γ minden véges részének van modellje, akkor nem csak, hogy Γ-nak is van modellje, hanem (2) szerint van olyan modellje is, mely egy igen speciális ultraszorzat. Ezért elég (2)-t megmutatni.

Legyen tehát $\mathcal{F}$ egy $|\Gamma|$-reguláris ultraszűrő valamilyen I halmaz felett, és legyen $E \subseteq \mathcal{F}$ egy olyan $|\Gamma|$ számosságú halmaz, melyre fennáll, hogy minden $i \in I$-re $\{e \in E : i \in e\}$ véges. A feltételek szerint van $f : \Gamma \to E$ bijekció. Legyen minden $i \in I$-re $\gamma(i) = \{\varphi \in \Gamma : i \in f(\varphi)\}$. Ekkor $\gamma(i)$ véges halmaz, és $\mathcal{A}_{\gamma(i)} \models \gamma(i)$. Legyen $\mathcal{A} = \Pi_{i \in I}\mathcal{A}_{\gamma(i)}/\mathcal{F}$. Állítjuk, hogy $\mathcal{A} \models \Gamma$. Legyen ugyanis $\varphi \in \Gamma$ tetszőleges. Ekkor $i \in f(\varphi)$ esetén $\varphi \in \gamma(i)$ és ezért $\mathcal{A}_{\gamma(i)} \models \varphi$. Tehát

$$\{i \in I : \mathcal{A}_{\gamma(i)} \models \varphi\} \supseteq f(\varphi) \in \mathcal{F}$$

vagyis a 2.19 Łoś-lemma miatt $\mathcal{A} \models \varphi$. ∎

Feladat. Legyen Σ formulahalmaz, φ pedig egy formula. Igazoljuk, hogy $\Sigma \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha van olyan véges $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, melyre $\Sigma_0 \models \varphi$.

Legyen K L-struktúrák egy osztálya. Azt mondjuk, hogy K zárt az elemi ekvivalenciára, ha $\mathcal{A} \in K, \mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B}$ esetén $\mathcal{B} \in K$ is fennáll. Hasonlóan, azt mondjuk, hogy K ultraszorzatra zárt, ha tetszőleges I halmaz, $\{\mathcal{A}_i : i \in I\} \subseteq K$ és tetszőleges I feletti $\mathcal{F}$ ultraszűrő esetén $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \in K$. Végül $\mathbf{Up}(K)$ jelöli a K elemeinek ultraszorzataiból álló struktúraosztályt.

2.23. Tétel. *Legyen I tetszőleges halmaz, és tegyük fel, hogy minden $i \in I$-re $\mathcal{F}_i$ egy ultraszűrő az I_i halmaz felett, melyek páronként diszjunktak. Legyen $\mathcal{F}$ egy ultraszűrő I-n, legyen $J = \cup_{i\in I} I_i$ és legyen*

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq J : \ \{i \in I : A \cap I_i \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F}\}.$$

Ekkor $\mathcal{G}$ egy ultraszűrő; melyet az $\mathcal{F}_i$-k szorzatának is nevezünk.

Bizonyítás. $J \in \mathcal{G}$ miatt $\mathcal{G} \neq \emptyset$ és $\emptyset \notin \mathcal{G}$: ellenkező esetben ugyanis a $K = \{i \in I : \emptyset \in \mathcal{F}_i\}$ halmaz $\mathcal{F}$-beli volna, és így $K \neq \emptyset$ miatt lenne olyan $i \in K \subseteq I$, hogy $\emptyset \in \mathcal{F}_i$ teljesülne. Világos, hogy $\mathcal{G}$ felszálló. Ha $A, B \in \mathcal{G}$, akkor $\{i \in I : A \cap I_i \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F}$ és $\{i \in I : B \cap I_i \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F}$ miatt

$$\begin{aligned}
&\{i \in I : A \cap I_i \in \mathcal{F}_i\} \cap \{i \in I : B \cap I_i \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in I : A \cap I_i, B \cap I_i \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in I : A \cap B \cap I_i \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&A \cap B \in \mathcal{G}
\end{aligned}$$

ezért $\mathcal{G}$ metszetre zárt. Végül, ha $A \subseteq J, A \notin \mathcal{G}$, akkor

$$\begin{aligned}
&\{i \in I : A \cap I_i \in \mathcal{F}_i\} \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in I : A \cap I_i \notin \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in I : I_i - (A \cap I_i) \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in I : (J - A) \cap I_i \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&J - A \in \mathcal{G}
\end{aligned}$$

vagyis $\mathcal{G}$ egy ultraszűrő. ∎

2.24. Tétel. *Legyen I halmaz, $\mathcal{F}$ ultraszűrő I felett és $\langle \mathcal{A}_i : i \in I\rangle$ L-struktúrák egy rendszere. Ekkor*

(1) Ha $\mathcal{F}$ főszűrő, mondjuk $\mathcal{F} = \mathcal{F}_j$, akkor $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}$ izomorf $\mathcal{A}_j$-vel.

(2) Minden struktúra elemien beágyazható minden utrahatványába. Részletesebben, ha $\mathcal{A}$ egy struktúra, $\mathcal{F}$ ultraszűrő, akkor a $\delta : \mathcal{A} \to {}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$, $\delta(a) = \langle a, a, a, ...\rangle/\mathcal{F}$ (az úgynevezett diagonális beágyazás) egy elemi beégyazás.

(3) $\mathbf{Up}(K)$ a legszűkebb, K-t tartalmazó ultraszorzatra zárt osztály.

Bizonyítás. (1) Legyen minden $a \in A_j$-re $a' \in \Pi_{i\in I}A_i$ egy olyan sorozat, melyre $a'_j = a$. Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor a $\Phi : \mathcal{A}_j \to \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}$, $\Phi(a) = a'/\mathcal{F}_j$ egy izomorfizmus.

(2) ellenőrzése rutinmunka.

(3) Világos, hogy (1) miatt $\mathbf{Up}(K)$ tartalmazza K-t és minden K-t tartalmazó, ultraszorzatra zárt osztálynak $\mathbf{Up}(K)$-t is tartalmaznia kell. Ezért elég igazolni, hogy $\mathbf{Up}(K)$ ultraszorzatra zárt. Legyen tehát I halmaz, $\mathcal{F}$ ultraszűrő I felett, és tegyük fel, hogy minden $i \in I$-re $\mathcal{A}_i \in \mathbf{Up}(K)$, vagyis $\mathcal{A}_i = \Pi_{j\in I_i}\mathcal{A}_{i,j}/\mathcal{F}_i$ valamilyen I_i feletti $\mathcal{F}_i$ ultraszűrőre és $\mathcal{A}_{i,j} \in K$ struktúrákra. Azt kell megmutatni, hogy $\mathcal{A} = \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \in \mathbf{Up}(K)$. Ehhez belátjuk, hogy $\mathcal{A}$ izomorf az $\{\mathcal{A}_{i,j} \in K : i \in I, j \in I_i\}$ struktúrák egy alkalmas ultraszorzatával.

Legyen J az $\langle I_i : i \in I\rangle$ halmazok diszjunkt uniója (a jelölések egyszerűbbé tétele érdekében feltehetjük, hogy az I_i halmazok diszjunktak: $J = \cup_{i\in I} I_i$; ekkor minden $j \in J$-hez pontosan egy $i \in I$ van, hogy $j \in I_i$, ezt a j-hez tartozó i-t j_i-vel fogjuk jelölni). Legyen $\mathcal{G}$ az $\mathcal{F}$ és $\langle \mathcal{F}_i, i \in I\rangle$ ultraszűrők 2.23 tétel szerinti szorzata. Ez tehát ultraszűrő J-n.

Célunk igazolni, hogy $\mathcal{A}$ izomorf a $\Pi_{j\in J}\mathcal{A}_{j_i,j}/\mathcal{G}$ struktúrával.

Állapodjunk meg abban a jelölésben, hogy ha a egy ultraszorzat tetszőleges eleme, akkor a' mindig az a egy direktszorzatbeli reprezentánsát jelöli (melyet előre rögzítettünk). Ha tehát $a \in A$, akkor $a' \in \Pi_{i\in I} A_i$ és ekkor tetszőleges $i \in I$-re $a'(i)' \in \Pi_{j\in I_i} A_{i,j}$ az $a'(i) \in A_i$ egy reprezentánsa. Legyen $\Phi : A \to \Pi_{j\in J}\mathcal{A}_{j_i,j}/\mathcal{G}$ a következő függvény:

$$\Phi(a) = \langle a'(j_i)'(j) :\ j \in J\rangle/\mathcal{G}.$$

Belátjuk, hogy Φ egy izomorfizmus $\mathcal{A} = \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} = \Pi_{i\in I}(\Pi_{j\in I_j}\mathcal{A}_{i,j}/\mathcal{F}_j)/\mathcal{F}$ és $\Pi_{j\in J}\mathcal{A}_{j_i,j}/\mathcal{G}$ között. Az világos, hogy Φ valóban ezen halmazok közti leképezés. Φ injektív, mert ha $a, b \in A$ különböző elemek, akkor a $K = \{i \in I : a'(i) \neq b'(i)\}$ halmazra $K \in \mathcal{F}$ és minden $i \in K$-ra $\{j \in I_i : a'(i)'(j) \neq b'(i)'(j)\} \in \mathcal{F}_i$. Ezért $\{j \in J :\ a'(j_i)'(j) \neq b'(j_i)'(j)\} \in \mathcal{G}$ miatt a és b képei különbözők. Φ szürjektív, mert ha $s \in \Pi_{j\in J}\mathcal{A}_{j_i,j}$ akkor $s/\mathcal{G} = \Phi(\langle s|_{I_i}/\mathcal{F}_i :\ i \in I\rangle/\mathcal{F})$.

Ha R egy (mondjuk n változós) relációszimbólum $\mathcal{A}$ nyelvében, $a_0, ..., a_{n-1} \in A$, akkor

$$\begin{aligned}
&R^{\mathcal{A}}(a_0, ..., a_{n-1}) \Leftrightarrow\\
&\{i \in I :\ R^{\mathcal{A}_i}(a'_0(i), ..., a'_{n-1}(i))\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow\\
&\{i \in I :\ \{j \in I_i :\ R^{\mathcal{A}_{i,j}}(a'_0(i)'(j), ..., a'_{n-1}(i)'(j))\} \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow\\
&\{j \in J : R^{\mathcal{A}_{j_i,j}}(\Phi(a_0)'(j_i)'(j), ..., \Phi(a_{n-1})'(j_i)'(j))\} \in \mathcal{G} \Leftrightarrow\\
&R^{\Pi_{j\in J}\mathcal{A}_{j_i,j}/\mathcal{G}}(\Phi(a_0), ..., \Phi(a_{n-1})).
\end{aligned}$$

Φ művelettartását hasonlóan ellenőrizhetjük. ∎

2.25. Tétel.

(1) A K struktúraosztály akkor és csak akkor axiomatizálható, ha K zárt ultra-

szorzatra és elemi ekvivalenciára.

(2) A K struktúraosztály akkor és csak akkor axiomatizálható végesen, ha K zárt elemi ekvivalenciára és ultraszorzatra, továbbá K komplementuma zárt ultraszorzatra.

Bizonyítás. (1) igazolásához tegyük fel először, hogy K axiomatizálható, azaz van olyan Σ formulahalmaz, hogy $K = Mod(\Sigma)$. Ekkor K nyilvánvalóan zárt elemi ekvivalenciára és a Łoś-lemma miatt K ultraszorzatra is zárt.

Fordítva, tegyük fel, hogy K zárt elemi ekvivalenciára és ultraszorzatra. Legyen

$$\Sigma = Th(K) = \{\varphi : \ K \models \varphi\},$$

megmutatjuk, hogy Σ axiomatizálja K-t, azaz $K = Mod(\Sigma)$. Ebből $K \subseteq Mod(\Sigma)$ világos. A fordított irányú tartalmazás igazolásához tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \in Mod(\Sigma)$. Megmutatjuk, hogy minden $\gamma \in [Th(\mathcal{A})]^{<\omega}$-hoz van egy $\mathcal{A}_\gamma \in K$ úgy, hogy

$$(*) \qquad \mathcal{A}_\gamma \models \gamma.$$

Ellenkező esetben lenne egy $\gamma \in [Th(\mathcal{A})]^{<\omega}$ úgy, hogy K egyetlen eleme sem lenne modellje γ-nak, vagyis $K \models \neg(\wedge\gamma)$, azaz $\neg(\wedge\gamma) \in Th(K) = \Sigma$ teljesülne. Ekkor azonban $\mathcal{A} \models \neg(\wedge\gamma)$ következne, ami lehetetlen $\gamma \subseteq Th(\mathcal{A})$ miatt. Ezzel $(*)$-ot igazoltuk.

Alkalmazzuk most a 2.22 tétel (2). pontját az $\{\mathcal{A}_\gamma : \ \gamma \in [Th(\mathcal{A})]^{<\omega}\}$ szereposztással. Ezek szerint az $\mathcal{A}_\gamma$-k egy alkalmas $\mathcal{B}$ ultraszorzata modellje $Th(\mathcal{A})$-nak, vagyis elemien ekvivalens $\mathcal{A}$-val. Mivel K zárt ultraszorzatra, $\mathcal{B} \in K$ és mivel K elemi ekvivalenciára is zárt, így $\mathcal{A} \in K$ is igaz.

$\mathcal{A} \in Mod(\Sigma)$ tetszőleges volt, tehát $Mod(\Sigma) \subseteq K$, azaz Σ axiomatizálja K-t.

(2)-höz először figyeljük meg, hogy ha K végesen axiomatizálható, akkor egy véges axiomatizációban szereplő formulák konjunkciójának tagadása axiomatizálja K komplementumát, ezért ebben az esetben (1) miatt K és komplementuma is zárt ultraszorzatra és elemi ekvivalenciára.

Tegyük most fel, hogy K zárt ultraszorzatra és elemi ekvivalenciára, valamint, hogy K komplementuma zárt ultraszorzatra. (1) miatt ekkor K axiomatizálható, sőt, a $\Sigma = Th(K)$ axiomatizálja K-t. Indirekt módon tegyük fel, hogy egyetlen $\gamma \in [\Sigma]^{<\omega}$ sem axiomatizál, ez csak úgy lehet, hogy minden $\gamma \in [\Sigma]^{<\omega}$-ra van K komplementumában olyan $\mathcal{A}_\gamma$, hogy $\mathcal{A}_\gamma \models \gamma$. Ekkor megint a 2.22 tétel (2). pontja miatt az $\{\mathcal{A}_\gamma : \ \gamma \in [\Sigma]^{<\omega}\}$ struktúrák egy alkalmas $\mathcal{B}$ ultraszorzata modellje Σ-nak. Mivel Σ axiomatizálja K-t, ebből $\mathcal{B} \in K$ következik. Ez azonban lehetetlen, mert az $\mathcal{A}_\gamma$ struktúrák mind K komplementumában vannak, és a feltevésünk szerint e komplementum ultraszorzatra zárt. ∎

Feladat. Igazoljuk, hogy ha K és M L-struktúrák egy-egy axiomatizálható osztálya, akkor $K \cup M$ is axiomatizálható.

2.26. Tétel. *Minden struktúra beágyazható végesen generált részstruktúráinak egy alkalmas ultraszorzatába.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ adott struktúra, legyen $\mathcal{F}$ egy $|A|$-reguláris ultraszűrő valamilyen I halmaz felett és legyen $E \subseteq \mathcal{F}$ egy olyan $|A|$ számosságú halmaz, melyre teljesül, hogy minden $i \in I$-re $\{e \in E : i \in e\}$ véges. A feltételek szerint van egy $f : A \to E$ bijekció. Minden $i \in I$-re legyen $\gamma(i) = \{a \in A : i \in f(a)\}$, ez A véges részhalmaza. Legyen $\mathcal{A}_i$ a $\gamma(i)$ által generált részstruktúra $\mathcal{A}$-ban és legyen $\mathcal{B} = \Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i / \mathcal{F}$. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{A}$ beágyazható $\mathcal{B}$-be.

Minden $a \in A$-ra legyen $a'_i = a$ ha $a \in A_i$, különben legyen a'_i tetszőleges elem A_i-ben. Legyen $a' = \langle a'_i : i \in I \rangle$ és legyen $g : A \to B$, $g(a) = a'/\mathcal{F}$, azt állítjuk, hogy ez a g a keresett beágyazás. A g injektív függvény, mert különböző $a, b \in A$ esetén minden $i \in f(a) \cap f(b)$-re $a'(i) = a \neq b = b'(i)$ és mivel $f(a) \cap f(b) \in \mathcal{F}$, ezért $g(a) \neq g(b)$.

Legyen most R egy n változós relációszimbólum $\mathcal{A}$ nyelvében, és legyen $a_0, ..., a_{n-1} \in A$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&R^{\mathcal{B}}(g(a_0), ..., g(a_{n-1})) \Leftrightarrow \\
&\{i \in I : R^{\mathcal{A}_i}((a_0)'_i, ..., (a_{n-1})'_i)\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&\{i \in \cap_{j \in n} g(a_j) : R^{\mathcal{A}_i}((a_0)'_i, ..., (a_{n-1})'_i)\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
&R^{\mathcal{A}}(a_0, ..., a_{n-1})
\end{aligned}$$

mert ha $i \in \cap_{j \in n} g(a_j)$, akkor $(a_0)'_i = a_0, ..., (a_{n-1})'_i = a_{n-1}$. Ezzel megmuattuk, hogy g megőrzi a relációkat. A függvények megőrzését hasonlóan lehet igazolni. ∎

2.27. Tétel. *Legyen L elsőrendű nyelv és legyen K L-struktúrák egy osztálya. K akkor és csak akkor axiomatizálható univerzális formulákkal, ha K zárt ultraszorzatra és részstruktúra-képzésre.*

Bizonyítás. Ha K axiomatizálható univerzális formulákkal, akkor K zárt ultraszorzatra és részstruktúra-képzésre, mert a 2.19 és az 1.11 tételek miatt ezek a műveletek megőrzik az univerzális formulák igazságát.

A másik irány igazolásához először megmutatjuk, hogy L-ből kiküszöbölhetők a függvényszimbólumok az alábbi gyenge értelemben.

Ha f egy (mondjuk n-változós) függvény egy B halmazon, akkor f azonosítható egy $n+1$ változós f^R relációval az $f^R(a_0, ..., a_{n-1}, a_n) \Leftrightarrow f(a_0, ..., a_{n-1}) = a_n$ összefüggés segítségével. Legyen L^R az a nyelv, melyet K nyelvéből úgy kapunk, hogy minden függvényszimbólumot kicserélünk egy 1-el többváltozós relációszimbólumra (tehát L^R-ben nincs függvényszimbólum), és minden L típusú $\mathcal{B}$ struktúrához legyen $\mathcal{B}^R$ az a struktúra, melynek alaphalmaza megegyezik $\mathcal{B}$ alaphalmazával, az L-beli relációszimbólumok interpretációja $\mathcal{B}$-ben és $\mathcal{B}^R$-ben megegyezik, végül az L-beli f függvényszimbólumoknak megfelelő relációszimbólumok interpretációi $\mathcal{B}^R$-ben az

$(f^{\mathcal{B}})^R$ relációk. Ekkor világos, hogy a $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ L-struktúrák akkor és csak akkor részstruktúrái egymásnak, ha $\mathcal{B}^R$ és $\mathcal{C}^R$ ugyanilyen viszonyban vannak, és hogy tetszőleges I halmaz és $\mathcal{F}$ I feletti ultraszűrő esetén $(\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F})^R = \Pi_{i\in I}(\mathcal{A}_i)^R/\mathcal{F}$, továbbá, hogy minden L^R beli φ^R univerzális formulához van olyan L-beli φ univerzális formula, hogy minden L-nyelvű $\mathcal{B}$ struktúrára $\mathcal{B}^R \models \varphi^R \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$, ehhez egyszerűen elég φ^R-ben az $f^R(v_{i_0}, ..., v_{i_{n-1}}, v_{i_n})$ alakú atomi formulákat $f(v_{i_0}, ..., v_{i_{n-1}}) = v_{i_n}$-re cserélni.

A lényeges különbség $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}^R$ között az, hogy egy $X \subseteq B$ által generált részstruktúra alaphalmaza $\mathcal{B}^R$-ben mindig azonos X-el, míg $\mathcal{B}$-ben a generátum X-nél bővebb is lehet.

Visszatérve a bizonyításhoz, tegyük most fel, hogy K zárt ultraszorzatra és részstruktúra-képzésre. Legyen Σ az összes olyan (L-beli) univerzális formulák halmaza, melyek igazak K-ban. Megmutatjuk, hogy $K = Mod(\Sigma)$. Ebből $K \subseteq Mod(\Sigma)$ nyilvánvaló, a fordított irányú tartalmazás igazolásához tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \in Mod(\Sigma)$. Azt állítjuk, hogy

$$(*) \qquad \text{Ha } \mathcal{A}_0 \text{ az } \mathcal{A}^R \text{ végesen generált részstruktúrája, akkor } \mathcal{A}_0 \in \mathbf{S}K^R.$$

Ha ugyanis $\mathcal{A}_0$ végesen generált és ezért véges részstruktúrája $\mathcal{A}^R$-nek, akkor $\mathcal{A}_0$ diagrammja egy véges formulahalmaz. E formulák konjunkcióját véve, az A_0 elemeit jelölő konstansszimbólumokat változókra cserélve és e változókat egzisztenciálisan kvantálva adódik, hogy az 1.22 tétel miatt van olyan $\Phi^R_{\mathcal{A}_0}$ egzisztenciális formula L^R-ben, hogy tetszőleges $\mathcal{B}^R \in K^R$-re $\mathcal{A}_0$ akkor és csak akkor ágyazható be $\mathcal{B}^R$-be, ha $\mathcal{B}^R \models \Phi^R_{\mathcal{A}_0}$. Ha tehát lenne $(*)$-nak ellentmondó véges $\mathcal{A}_0$, akkor $K^{\mathcal{R}} \models \neg\Phi^R_{\mathcal{A}_0}$ következne, emiatt az L-beli univerális $\neg\Phi_{\mathcal{A}_0}$ formula Σ-beli lenne, vagyis $\mathcal{A} \models \neg\Phi_{\mathcal{A}_0}$ adódna, ami lehetetlen, mert $\mathcal{A}_0$ beágyazható $\mathcal{A}^R$-be, ezért $\mathcal{A}^R \models \Phi^R_{\mathcal{A}_0}$ és így $\mathcal{A} \models \Phi_{\mathcal{A}_0}$. Ezzel $(*)$-ot igazoltuk.

$\mathcal{A}^R$ véges részstruktúrái tehát mind $\mathbf{S}K^R$-ben vannak, ezért a 2.26 tétel miatt $\mathcal{A}^R$ beágyazható $\mathbf{S}K^R$-beli, és így persze K^R-beli struktúrák (legyenek ezek mondjuk $\langle \mathcal{C}^R_i : i \in I\rangle$) egy $\mathcal{B}^R$ ultraszorzatába, ekkor $\mathcal{A}$ beágyazható a K-beli $\langle \mathcal{C}_i : i \in I\rangle$ struktúrák egy $\mathcal{B}$ ultraszorzatába. De K ultraszorzatra zárt, ezért $\mathcal{B} \in K$ és K részstruktúra-képzésre való zártsága miatt $\mathcal{A} \in K$, vagyis $Mod(\Sigma) \subseteq K$, ahogy állítottuk. ∎

2.6. További alkalmazások

Most ismertetjük a 2.26 tétel néhány további, logikán kívüli következményét. Egy kombinatorikus eredménnyel kezdjük.

2.28. Tétel. *(Erdős-De Bruijn).*
Legyen $k \in \omega$ és $\mathcal{G}$ egy gráf. $\mathcal{G}$ akkor és csak akkor színezhető k színnel, ha minden véges részgráfja színezhető k színnel.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{G}$ k színnel színezhető, akkor egy ilyen színezés $\mathcal{G}$ minden véges részét is megszínezi a kívánt módon.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathcal{G}$ véges részei k színnel színezhetők, minden $G_0 \in [G]^{<\omega}$-hoz rögzítsünk egy $k_{\mathcal{G}_0} : G_0 \to k$ színezést. A 2.26 tétel miatt $\mathcal{G}$ beágyazható véges részeinek egy ultraszorzatába, mondjuk $\mathcal{H} = \Pi_{i \in I} \mathcal{G}_i / \mathcal{F}$-be. Elég igazolni, hogy $\mathcal{H}$ k színnel színezhető, mert e színezés $\mathcal{G}$-t is kiszínezi.

Legyen tehát $s \in \Pi_{i \in I} G_i$ és legyen $J_v = \{i \in I : k_{\mathcal{G}_i}(s_i) = v\}$. Ekkor a $\{J_v : v \in k\}$ halmazrendszer I egy véges partíciója, ezért a 2.5 tétel miatt pontosan egy k-beli elemre (mondjuk v-re) teljesül, hogy $J_v \in \mathcal{F}$, legyen $h(s/\mathcal{F}) = v$. (Azaz $s/\mathcal{F}$ színe pontosan akkor v, ha majdnem minden koordinátájának ez a színe – világos, hogy ugyanezt a színt kapjuk, ha $s/\mathcal{F}$-ből egy másik reprezentánst választunk).

Ezzel megadtunk egy $h : H \to k$ függvényt. Ez jó, mert ha $p/\mathcal{F}, q/\mathcal{F} \in H$ olyan csúcsok, melyek között él van $\mathcal{H}$-ban, akkor $J = \{i \in I : \mathcal{G}_i(p_i, q_i)\} \in \mathcal{F}$ és ekkor, mivel $k_{\mathcal{G}_i}$ jó színezés, minden $i \in J$-re $k_{\mathcal{G}_i}(p_i) \neq k_{\mathcal{G}_i}(q_i)$ vagyis $h(p/\mathcal{F}) \neq h(q/\mathcal{F})$. ∎

Feladatok. 1. A K test rendezhető, ha van K-n olyan rendezési reláció, mely szerint a K-beli $+$ és $\cdot$ műveletek mindkét változójukban monoton növőek. Igazoljuk, hogy K akkor és csak akkor rendezhető, ha K minden végesen generált részteste rendezhető.

2. Legyen $m \in \omega$. A G csoport m-reprezentálható, ha van olyan F test, hogy G beágyazható az F feletti nemszinguláris, $m \times m$-es mátrixok multiplikatív csoportjába. Igazoljuk, hogy G akkor és csak akkor m-reprezentálható, ha minden végesen generált részcsoportja m-reprezentálható.

2.29. Tétel. *Legyen A végtelen halmaz, és legyen $\mathcal{F}$ reguláris ultraszűrő I felett. Ekkor $|{}^I A/\mathcal{F}| = |A|^{|I|}$.*

Bizonyítás. Az ultraszorzat a direktszorzat egy faktora, ezért $|{}^I A/\mathcal{F}| \leq |{}^I A| = |A|^{|I|}$. A fordított irányú becslés kicsit bonyolultabb.

Mivel $\mathcal{F}$ reguláris, van olyan $|I|$ számosságú $E \subseteq \mathcal{F}$, hogy minden $i \in I$-re $\{e \in E : i \in e\}$ véges halmaz. Legyen $f : I \to E$ bijekció, és legyen $\gamma(i) = \{j \in I : i \in f(j)\}$, ez minden $i \in I$-re véges halmaz. Ezért, és mivel A végtelen halmaz, minden $i \in I$-re $|{}^{\gamma(i)}A| = |A|$. Emiatt elég megmutatni, hogy $|\Pi_{i \in I} {}^{\gamma(i)}A/\mathcal{F}| \geq |A|^{|I|}$.

Legyen minden $s \in {}^I A$-ra és $i \in I$-re $\Phi(s)(i) = s|_{\gamma(i)} \in {}^{\gamma(i)}A$ és legyen $\Phi(s) = \langle \Phi(s)(i) : i \in I \rangle / \mathcal{F}$. Ekkor tehát $\Phi : {}^I A \to \Pi_{i \in I} {}^{\gamma(i)}A/\mathcal{F}$, a bizonyítás befejezéséhez Φ injektivitását kell igazolnunk.

Legyen q és s két különböző elem ${}^I A$-ban. Ekkor van olyan $i \in I$, hogy $s(i) \neq q(i)$, és ezért minden $j \in f(i)$-re $\Phi(s)(j) \neq \Phi(q)(j)$. Mivel $f(i) \in E \subseteq \mathcal{F}$, ezért valóban $\Phi(s) \neq \Phi(q)$. ∎

Feladatok. 1. Ha minden $n \in \omega$-ra az A_n olyan véges halmaz, hogy $|A_n| \geq 2^n$ és $\mathcal{F}$ nemfő ultraszűrő ω-n, akkor $|\Pi_{n\in\omega} A_n/\mathcal{F}| = 2^{\aleph_0}$.
2. Ha $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ véges halmazok olyan sorozata, hogy $\{|A_n| : n \in \omega\}$ nem korlátos, akkor van olyan $\mathcal{F}$ ultraszűrő ω-n, hogy $|\Pi_{n\in\omega} A_n/\mathcal{F}| = 2^{\aleph_0}$.

2.30. Tétel. *(Felszálló Löwenheim-Skolem tétel).*
Ha a Σ elméletnek van végtelen modellje, és κ a Σ nyelvénél nagyobb-egyenlő számosság, akkor Σ-nak van pontosan κ számosságú modellje is.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ a Σ egy végtelen modellje, és rögzítsünk egy, a feltételeknek eleget tevő κ-t. A 2.21 tétel (2) pontja miatt van κ-n egy reguláris $\mathcal{F}$ ultraszűrő. Ekkor a Łoś-lemma és a 2.29 tétel miatt $\mathcal{B} = {}^{\kappa}\mathcal{A}/\mathcal{F} \models \Sigma$ és $|B| = |A|^{\kappa} \geq 2^{\kappa} > \kappa$. Van tehát B-nek egy pontosan κ számosságú részhalmaza, az 1.16 leszálló Löwenheim-Skolem tétel miatt ez a részhalmaz benne van $\mathcal{B}$ egy legfeljebb (és így pontosan) κ számosságú elemi részében, ez az elemi rész a keresett modell. ∎

Ezek szerint egy végtelen $\mathcal{A}$ struktúra elsőrendben izomorfizmus erejéig leirhatatlan: a 2.30 tétel miatt mindig van egy $\mathcal{A}$-val elemien ekvivalens, de nem izomorf $\mathcal{B}$ struktúra. Ennek a ténynek érdekes ismeretelméleti következményei vannak. Egy végtelen struktúrát (elsőrendű) tulajdonságai megadásával nem lehet egyértelműen azonosítani. Viszont formalizált, vagy akár természetes nyelveken csak az $\mathcal{A}$ struktúra tulajdonságairól tudunk beszélni, éppen $\mathcal{A}$ végtelensége akadályozza meg, hogy véges idő alatt $\mathcal{A}$ egész szerkezetét képesek legyünk kifejezni vagy felfogni.

2.7. Univerzális struktúrák

Mennyire lehet más két elemien ekvivalens modell szerkezete? A 2.30 tétel miatt univerzumaik számossága lehet eltérő. De vajon hasonlít-e a modellek szerkezete egymáshoz, ha már elméleteik teljesen megegyeznek?

Az alfejezet célja, hogy modellelméleti módon jellemezzük az elemien ekvivalens struktúrapárokat. Be fogunk vezetni egy „ultralánc" nevű modellkonstrukciót, és meg fogjuk mutatni, hogy két modell pontosan akkor elemien ekvivalens, ha vannak izomorf ultraláncaik. Ezzel tehát formulákra való hivatkozás nélkül, tisztán a modellek szerkezete segítségével írjuk majd le az elemi ekvivalenciát. A konstrukció viszonylag egyszerű, de elég áttekinthetetlen. A 2.9 fejezetben vissza fogunk térni a kérdésre. Ott (jóval nagyobb technikai nehézségek árán) igazoljuk majd, hogy két struktúra akkor és csak akkor elemien ekvivalens, ha vannak izomorf ultrahatványaik.

A 2.29 tételben láttuk, hogy egy végtelen struktúra reguláris ultraszűrő szerinti ultrahatványának számossága egyenlő a direkthatványa számosságával, vagyis olyan nagy, amilyen nagy csak lehet. Most megmutatjuk, hogy a reguláris ultraszűrők szerinti ultrahatványok egy másik értelemben is nagyon nagyok.

2.31. Definíció. *Legyen κ számosság. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ struktúra κ-univerzális, ha minden, $\mathcal{A}$-val elemien ekvivalens és κ-nál kisebb számosságú struktúra elemien beágyazható $\mathcal{A}$-ba.*

2.32. Tétel.

(1) Legyen $\mathcal{A}_0$ tetszőleges L-struktúra, legyen $\kappa \geq |Form(L)|$ egy számosság és legyen $\mathcal{F}$ κ-reguláris ultraszűrő az I halmaz felett. Ekkor az ${}^I\mathcal{A}_0/\mathcal{F}$ ultrahatvány κ^+-univerzális.

(2) Ha $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egy elemi beágyazás, $\kappa \geq |B|, |Form(L)|$; $\mathcal{F}$ egy κ-reguláris ultraszűrő I felett, akkor van olyan $\varrho : \mathcal{B} \to {}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$ elemi beágyazás, melyre $\delta_{\mathcal{A}} = \varrho \circ \phi$ (itt $\delta_{\mathcal{A}}$ az $\mathcal{A}$ diagnális beágyazása ${}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$-be).

Bizonyítás. Kezdjük (1) igazolásával. Feltehető, hogy $\mathcal{A}_0$ végtelen, különben az állítás semmitmondó.

Legyen $\mathcal{B}$ egy $\mathcal{A}_0$-al (és ekkor persze $\mathcal{A} := {}^I\mathcal{A}_0/\mathcal{F}$-el is) elemien ekvivalens struktúra, melyre $|B| < \kappa^+$ (azaz $|B| \leq \kappa$). Megmutatjuk, hogy $\mathcal{B}$ elemien beágyazható $\mathcal{A}$-ba. Ehhez az 1.22 tétel miatt elég, ha azt igazoljuk, hogy minden $b \in B$-hez van $b' \in A$ úgy, hogy $\langle \mathcal{A}, b' \rangle_{b \in B}$ modellje $\mathcal{B}$ elemi diagrammjának (amit, mint eddig is, $\Delta_e(\mathcal{B})$-vel jelölünk).

Mivel $\mathcal{F}$ κ-reguláris, van olyan $E \subseteq \mathcal{F}$, hogy $|E| = \kappa$ és minden $i \in I$-re $\{e \in E : i \in e\}$ véges halmaz. Feltevéseink szerint $|\Delta_e(\mathcal{B})| \leq \kappa$ ezért van egy injektív $f : \Delta_e(\mathcal{B}) \to E$ függvény. Legyen minden $i \in I$-re $\gamma(i) = \{\varphi \in \Delta_e(\mathcal{B}) : i \in f(\varphi)\}$.

Ekkor minden $i \in I$-re $\gamma(i)$ véges formulahalmaz, ezért csak véges sok olyan konstansjel van $\gamma(i)$-ben, mely $\mathcal{A}$ nyelvében nem szerepel, és melyeket csak azért vettünk fel, hogy megjelöljük a B-beli elemeket. Cseréljük ki ezeket a konstansszimbólumokat individuumváltozókra, c_b-t mondjuk x_b-re úgy, hogy különböző konstansszimbólumokhoz különböző változókat választunk, legyenek e kicserélt formulák $\varphi_0(x_{b_0}, ..., x_{b_{n-1}}), ..., \varphi_{m-1}(x_{b_0}, ..., x_{b_{n-1}})$. Ekkor

$$\mathcal{B} \models (\exists x_{b_0} ... \exists x_{b_{n-1}}) \wedge_{j \in m} \varphi_j(x_{b_0}, ..., x_{b_{n-1}}),$$

és mivel $\mathcal{A}_0 \equiv_e \mathcal{B}$, vannak olyan $b'_0(i), ..., b'_{n-1}(i) \in \mathcal{A}_0$ elemek, melyekre $\mathcal{A}_0 \models \wedge_{j \in m} \varphi_j[b'_0(i), ..., b'_{n-1}(i)]$. Ez azt jelenti, hogy minden $\varphi \in \gamma(i)$-re

$$(*) \qquad \langle \mathcal{A}_0,\ b'_0(i), ..., b'_{n-1}(i) \rangle \models \varphi.$$

Ha $b \in B$ olyan elem, melyre c_b nem szerepel $\gamma(i)$ egyetlen formulájában sem, akkor legyen $b'(i) \in A_0$ tetszőleges. Végül minden $b \in B$-re legyen $b' = \langle b'(i) : i \in I \rangle / \mathcal{F}$. Állítjuk, hogy $\langle \mathcal{A}, b' \rangle_{b \in B} \models \Delta_e(\mathcal{B})$.

Ez azért van így, mert ha $\varphi \in \Delta_e(\mathcal{B})$ tetszőleges, akkor $(*)$ miatt

$$\{i \in I : \langle \mathcal{A}_0,\ b'(i) \rangle_{b \in B} \models \varphi\} \supseteq \{i \in I : \varphi \in \gamma(i)\} = f(\varphi) \in \mathcal{F},$$

vagyis a Łoś-lemma miatt $\langle \mathcal{A}, b' \rangle_{b \in B} \models \varphi$, ahogy állítottuk.

(2)-höz figyeljük meg, hogy mivel ϕ elemi beágyazás, ezért az $\mathcal{A}^+ = \langle \mathcal{A}, a \rangle_{a \in A}$ és $\mathcal{B}^+ = \langle \mathcal{B}, \phi(a) \rangle_{a \in A}$ elemien ekvivalens struktúrák. A tétel (1) pontja szerint $\mathcal{B}^+$ elemien beágyazható ${}^I\mathcal{A}^+/\mathcal{F}$-be, legyen ez a beágyazás ϱ. Mivel minden $a \in A$-ra c_a interpretációja ${}^I\mathcal{A}^+/\mathcal{F}$-ban éppen $\delta_{\mathcal{A}}(a)$, ezért teljesül, hogy $\delta_{\mathcal{A}} = \varrho \circ \phi$. ∎

Megjegyzések.

Az előző bizonyítás nagyon szemléletes. $\mathcal{B}$ elemi beágyazásánál minden $b \in B$ elemnek meg kell találnunk a képét az ultrahatványban, a képek minden elsőrendben ($\mathcal{B}$ nyelvén) kifejezhető tulajdonságának meg kell egyeznie az eredeti elemek tulajdonságával. Ez összesen annyi feladat, mint amennyi $\Delta_e(\mathcal{B})$ számossága. Ha $\mathcal{F}$ egy olyan ultraszűrő, mely legalább annyira reguláris, mint ahány feladat van, akkor a feladatokat szét tudjuk úgy osztani, hogy minden koordinátára csak véges sok feladat jusson. Ezeket a feladatokat külön-külön meg tudjuk oldani, mert az egyes koordinátákra előírt véges sok feltétel elsőrendű formulákkal leírható, ezért az elemi ekvivalenciát használva e feltételek kielégíthetők.

Tehát $\mathcal{B}$ úgy ágyazható elemien az ultrahatványba, hogy minden egyes koordinátán elég $\mathcal{B}$ egy véges részét jól reprezentálni. Azt azonban érdemes megfigyelni, hogy e véges részeket „egyszerre" reprezentáltuk, azaz egy-egy véges részen belül minden elem képe függ a többi figyelembe vett elemtől is (pontosabban b képének i. koordinátája nem csak b-től függ, hanem attól is, hogy milyen további elemeket és feladatokat kell megoldanunk az i. koordinátán; e feladatok ráadásul koordinátánként is változhatnak, ezért a feladatokat rögzített koordinátákra előbb összegyűjtöttük, és az i. koordinátán egyszerre oldottuk őket meg – vagyis úgy kerestük b képét, hogy közben tudtuk, milyen más feladatokat kell még megoldani a szóbanforgó koordinátán).

A 2.32 tétel egy alkalmazásaként megadjuk az elemi ekvivalencia egy modellelméleti jellemzését.

2.33. Definíció. *Legyen κ egy rendszám. Struktúrák egy $\langle \mathcal{A}_\lambda : \lambda < \kappa \rangle$ rendszerét $\mathcal{A}_0$ egy κ-hosszú ultraláncának nevezzük, ha minden $\mu < \kappa$ rendszámra teljesül, hogy*

- *ha μ rákövetkező rendszám, mondjuk $\mu = \nu + 1$, akkor $A_\nu \subseteq A_\mu$ és $\mathcal{A}_\mu$ izomorf $\mathcal{A}_\nu$ egy ultrahatványával,*
- *ha μ limeszrendszám, akkor $\mathcal{A}_\mu = \cup_{\nu < \mu} \mathcal{A}_\nu$.*

Az $\cup_{\lambda < \kappa} \mathcal{A}_\lambda$ struktúrát az ultralánc limeszének nevezzük.

2.34. Tétel. *(Frayne.)*
Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák akkor és csak akkor elemien ekvivalensek, ha vannak ω-hosszú izomorf limeszű ultraláncaik.

Bizonyítás. Ha a szóbanforgó struktúrák végesek, akkor az állítás megintcsak semmitmondó. Ezert feltehető, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ végtelenek.

Az 1.18 tétel miatt minden struktúra elemien ekvivalens minden ultraláncának limeszével, mivel a Łoś-lemma miatt minden ultralánc elemi lánc is. Ezért, ha $\mathcal{A}_\omega$ az $\mathcal{A}$ egy ω hosszú ultraláncának limesze és $\mathcal{B}_\omega$ a $\mathcal{B}$ egy ω hosszú ultraláncának limesze úgy, hogy e limeszek izomorfak, akkor

$$\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{A}_\omega \cong \mathcal{B}_\omega \equiv_e \mathcal{B},$$

vagyis $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ elemien ekvivalensek.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B}$. Meg kell konstruálnunk a belőlük induló, izomorf limeszű ultraláncokat. Legyen tehát $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ és $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$. Mivel $\mathcal{A}_0$ és $\mathcal{B}_0$ elemien ekvivalensek, ezért a 2.32 tétel miatt $\mathcal{B}_0$-nak van olyan $\mathcal{B}_0'$ ultrahatványa, melybe $\mathcal{A}_0$ elemien beágyazható. Ekkor a 2.24 tétel (2). pontja miatt $\mathcal{B}_0$-t a $\delta_{\mathcal{B}_0}$ diagonális függvény elemien beágyazza $\mathcal{B}_0'$-be. $\mathcal{B}_1$ legyen $\mathcal{B}_0'$-nek az az izomorf másolata, melyet úgy kapunk, hogy $\delta_{\mathcal{B}_0}$ értékkészletét pontonként helyettesítjük $\delta_{\mathcal{B}_0}$ értelmezési tartományának megfelelő elemével és legyen $\phi_0 : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}_1$ egy elemi beágyazás. Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \omega$-ra adottak már az $\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{B}_0, ..., \mathcal{B}_n$ struktúrák úgy, hogy a következők teljesülnek.

$A_0 \subseteq A_1 \subseteq ... \subseteq A_{n-1}, \qquad B_0 \subseteq B_1 \subseteq ... \subseteq B_n,$
ha $i < n-1$, akkor $\mathcal{A}_{i+1}$ izomorf $\mathcal{A}_i$ egy ultrahatványával,
ha $i < n$, akkor $\phi_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_{i+1}$ egy elemi beágyazás,
ha $i < n$, akkor $\mathcal{B}_{i+1}$ izomorf $\mathcal{B}_i$ egy ultrahatványával,
ha $1 \leq i < n$, akkor $\sigma_i : \mathcal{B}_i \to \mathcal{A}_i$ egy elemi beágyazás,
ha $i < n-1$, akkor $Id_{A_i} = \sigma_{i+1} \circ \phi_i$,
ha $1 \leq i < n$, akkor $Id_{B_i} = \phi_i \circ \sigma_i$.

Megadjuk $\mathcal{A}_n$-et, $\mathcal{B}_{n+1}$-et, ϕ_n-et és σ_{n+1}-et úgy, hogy ezek az indukciós feltételek igazak maradjanak. Az indukciós feltételek szerint ϕ_{n-1} elemi beágyazás, ezért $\mathcal{A}_{n-1}$ és $\mathcal{B}_n$ elemien ekvivalensek. A 2.32 tétel (2). pontja szerint $\mathcal{A}_{n-1}$-nek van olyan $\mathcal{A}_n'$ ultrahatványa, és van olyan $\varrho : \mathcal{B}_n \to \mathcal{A}_n'$ elemi beágyazás, hogy a $\delta_{\mathcal{A}_{n-1}} : \mathcal{A}_{n-1} \to \mathcal{A}_n'$ diagonális beágyazásra teljesül, hogy $\delta_{\mathcal{A}_{n-1}} = \varrho \circ \phi_{n-1}$. Legyen $\mathcal{A}_n$ az $\mathcal{A}_n'$ struktúra olyan izomorf másolata, melyben $\delta_{\mathcal{A}_{n-1}}$ értékkészletét elemenként kicseréltük $\mathcal{A}_{n-1}$ megfelelő elemére és legyen $\sigma_n = \varrho - \{\langle \phi_{n-1}(a), \varrho(\phi_{n-1}(a))\rangle :\ a \in A_{n-1}\} \cup \{\langle \phi_{n-1}(a), a\rangle :\ a \in A_{n-1}\}$.

Teljesen hasonlóan, a 2.32 tétel (2) pontja szerint van $\mathcal{B}_n$-nek olyan $\mathcal{B}_{n+1}'$ ultrahatványa és $\theta : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}_{n+1}$ elemi beágyazás, melyre $\delta_{\mathcal{B}_n} = \theta \circ \sigma_n$. Legyen $\mathcal{B}_{n+1}$ a $\mathcal{B}_{n+1}'$ struktúra olyan izomorf másolata, melyben $\delta_{\mathcal{B}_n}$ értékkészletét elemenként kicseréltük $\mathcal{B}_n$ megfelelő elemére és legyen $\phi_{n+1} = \theta - \{\langle \sigma_n(b), \theta(\sigma_n(b))\rangle :\ b \in B_n\} \cup \{\langle \sigma_n(b), b\rangle :\ b \in B_n\}$. Könnyű ellenőrizni, hogy ezzel az indukciós feltételek érvényben maradtak.

Ezzel definiáltuk az $\langle \mathcal{A}_n :\ n \in \omega\rangle$ és a $\langle \mathcal{B}_n :\ n \in \omega\rangle$ ultraláncokat, legyenek limeszeik rendre $\mathcal{A}_\omega$ és $\mathcal{B}_\omega$. Megmutatjuk, hogy e két utóbbi struktúra izomorf.

Ha $a \in A_\omega = \cup_{n\in\omega} A_n$, akkor van egy legkisebb $n \in \omega$, melyre $a \in A_n$, ezt a legkisebb n-t $\nu(a)$-val jelöljük. Legyen $\Phi : A_\omega \to B_\omega,\ \ \Phi(a) = \phi_{\nu(a)}(a)$. Belátjuk, hogy ez a Φ a keresett izomorfizmus. Először figyeljük meg, hogy ha $a \in A_\omega$ és $n \geq m \geq \nu(a)$, akkor $\phi_n(a) = \phi_m(a)$. Ez $n-m$ szerinti indukcióval látható be: ha $n-m=0$, akkor nincs mit igazolni. Tegyük fel, hogy minden olyan számpárra igaz az állítás, melyek különbsége legfeljebb k, és tegyük fel, hogy $n \geq m \geq \nu(a)$, $n-m=k+1$. Ekkor $\phi_m(a) = \phi_{m+k}(a) = (\phi_n \circ \sigma_n) \circ \phi_{m+k}(a) = \phi_n \circ (\sigma_n \circ \phi_{m+k})(a) = \phi_n(a)$, ahogy állítottuk.

Φ injektív, mert ha $a, b \in A_\omega$ különböző elemek, akkor tetszőleges $n \geq \nu(a), \nu(b)$-re $\Phi(a) = \phi_n(a) \neq \phi_n(b) = \Phi(b)$. Φ szürjektív, hiszen ha $b \in B_\omega$, akkor van olyan $n \in \omega$, hogy $b \in B_n$, ekkor $b = \phi_n \circ \sigma_n(b)$ ezért $\Phi(\sigma_n(b)) = \phi_n(\sigma_n(b)) = b$, azaz b benne van Φ értékkészletében. Végül legyen R (mondjuk n-változós) relációszimbólum $\mathcal{A}$ nyelvében, és legyen $a_0, ..., a_{n-1} \in A_\omega$. Ekkor $m \geq \nu(a_0), ..., \nu(a_{n-1})$-re $\mathcal{A}_m$ elemi rész $\mathcal{A}_\omega$-ban, és $\mathcal{B}_{m+1}$ elemi rész $\mathcal{B}_\omega$-ban, ezért

$$\begin{aligned}
&R^{\mathcal{A}_\omega}(a_0, ..., a_{n-1}) \Leftrightarrow \\
&R^{\mathcal{A}_m}(a_0, ..., a_{n-1}) \Leftrightarrow \text{(mivel } \phi_m \text{ elemi beágyazás)} \\
&R^{\mathcal{B}_{m+1}}(\phi_m(a_0), ..., \phi_m(a_{n-1})) \Leftrightarrow \text{(mivel } m \text{ elég nagy)} \\
&R^{\mathcal{B}_{m+1}}(\Phi(a_0), ..., \Phi(a_{n-1})) \Leftrightarrow \\
&R^{\mathcal{B}_\omega}(\Phi(a_0), ..., \Phi(a_{n-1})),
\end{aligned}$$

ahogy állítottuk. Φ műveletartását hasonlóan igazolhatjuk. ∎

Mint említettük, az előbbi konstrukció egyszerűsége ellenére felmerül a kérdés, hogy van-e áttekinthetőbb modellelméleti jellemzése az elemi ekvivalenciának. Meg fogjuk mutatni, hogy a válasz igenlő: a jellemzéshez nincs szükség ω-hosszú ultraláncokra. Keisler és Shelah tételei szerint két struktúra akkor és csak akkor elemien ekvivalens, ha vannak izomorf ultrahatványaik. E tétel igazolásához további fogalmakra lesz szükségünk, melyeket később sok más célra is fel fogunk használni. E fogalmakat a következő alfejezetben ismertetjük.

2.8. Szaturált struktúrák

Milyen kapcsolat lehet egy $\mathcal{A}$ struktúra egy a eleme (vagy elemei) és egy $X \subseteq A$ részhalmaz elemei között? Hogy e kapcsolatokat átlássuk, célszerű L-et kibővíteni úgy, hogy X minden elemét megnevezzük egy-egy konstanszimbólummal. A kibővített nyelvet (az 1.21 definíciónak megfelelően) L_X-el jelöljük majd, és a könnyebb olvashatóság érdekében nem (mindig) teszünk szigorú különbséget X elemei és az őket megnevező konstansszimbólumok között.

Ezek után a és X kapcsolatát a $\{\varphi(x, \bar{b}) :\ \mathcal{A} \models \varphi(a, \bar{b}),\ \bar{b} \subseteq X\}$ formulahalmaz írja le. Ez minden információt tartalmaz, amely egyáltalán kifejezhető az L_X nyelven. Ez motiválja a következő definíciót.

2.35. Definíció. *Legyen $\bar{v} = \langle v_0, v_1, ...\rangle$ individuumváltozók egy sorozata, $\mathcal{A}$ egy L-struktúra és legyen $X \subseteq A$. Ekkor a $p \subseteq L_X$ formulahalmazt egy $\bar{v}$ feletti, $\mathcal{A}$-beli X-típusnak nevezzük, ha*

- *A p-beli formulákban legfeljebb a $v_0, v_1, ...$ változók fordulnak elő szabadon,*
- *minden $p_0 \in [p]^{<\omega}$-ra $\mathcal{A} \models \exists v_0 \exists v_1 ... \wedge p_0$,*
- *ha φ egy olyan formula, melyben legfeljebb a $v_0, v_1, ...$ változók fordulnak elő szabadon, akkor $\varphi \in p$ vagy $\neg\varphi \in p$.*

A $\bar{v}$ feletti, $\mathcal{A}$-beli X-típusok halmazát $S_{\bar{v}}^{\mathcal{A}}(X)$-el jelöljük.

Megjegyzések.

(1) A definíció szerint a változók $\bar{v} = \langle v_0, v_1, ...\rangle$ sorozata akár végtelen is lehet, az alábbi tételek mindegyike ebben az általános esetben is érvényes (a közölt bizonyítások így is működnek). Ha $\bar{v}$ végtelen, akkor az előbbi definícióban $\exists v_0 \exists v_1 ... \wedge p_0$ a $\wedge p_0$ egzisztenciális lezártját jelenti.

(2) Ugyanakkor fontos lesz az az eset, amikor $\bar{v}$ véges (sőt, egyelemű). A jelölések egyszerűsítése érdekében ekkor $S_{v_0, ... v_{n-1}}$ helyett S_n-et írunk majd (tehát $S_1^{\mathcal{A}}(X)$ formuláiban v_0 lehet az egyetlen szabad változó).

(3) A típus fogalma sokban emlékeztet a következő klasszikusabb algebrai konstrukcióra. Legyen $K < L$ két test, $a \in L$. Ekkor az $I = \{p(x) \in K[x] : p(a) = 0\}$ ideál megadja az összes atomi formulát, mely fennáll a és K elemei között. Ezért ez az ideál egy elsőrendűnél szegényesebb nyelven vett 1-változós K feletti típusnak tekinthető. E kapcsolatot érdemes fejben tartani, mert sokszor segít további általánosítások motiválásában, illetve modellelméleti tételek szemléltetésében. Sőt, a 6.5 fejezetben majd klasszikus algebrai problémák vizsgálatára fogjuk alkalmazni modellelméleti eredményeinket.

(4) Ha A egy halmaz, akkor $\bar{a} \in X$ (kissé pontatlanul) azt jelöli, hogy $\bar{a}$ az A elemeinek egy (véges) sorozata.

2.36. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ struktúra, $\bar{v}$ változók egy sorozata és legyen $X \subseteq A$. Az $R \subseteq {}^{\bar{v}}A$ reláció X-beli paraméterekkel definiálható, ha van olyan $\varphi \in L_X$ formula, melyben legfeljebb $\bar{v}$ elemei fordulnak elő szabadon, és melyre*

$$R = \{s \in {}^{\bar{v}}A : \ \mathcal{A} \models \varphi[s]\}.$$

A φ által definiált R relációra alkalmazni fogjuk az $R = ||\varphi||^{\mathcal{A}}$, esetleg az $R = \varphi(\mathcal{A})$ jelölést is. Ha $X = \emptyset$, akkor R paraméterek nélkül definiálható.

2.37. Tétel. *Az előbbi jelölésekkel az X-beli paraméterekkel definiálható rögzített szabad változójú relációk egy $\mathcal{B}$ Boole-algebrát alkotnak a halmazelméleti $\cap$-el és komplementumképzéssel, mint műveletekkel. A $p \in S_{\bar{v}}^{\mathcal{A}}(X)$ típusok (azonosíthatók) $\mathcal{B}$ ultraszűrői(vel).*

Bizonyítás. Az X-beli paraméterekkel definiálható relációk halmaza nyilvánvalóan zárt a megadott műveletekre.

Legyen $p \in S_{\bar{v}}^{\mathcal{A}}(X)$ egy típus, belátjuk, hogy ekkor a $p^* = \{||\varphi||^{\mathcal{A}} : \varphi \in p\}$ egy ultraszűrő $\mathcal{B}$-n. A 2.35 definíció utolsó pontja miatt p^* nem üres, sőt, $\mathcal{B}$ minden eleme, vagy az elem komplementuma benne van p^*-ban. $\emptyset \notin p^*$, mert ellenkező esetben lenne olyan $\varphi \in p$, hogy $||\varphi||^{\mathcal{A}} = \emptyset$, de ekkor nem teljesülne, hogy $\mathcal{A} \models \exists_{\bar{v}}\varphi$, azaz p nem lenne típus. p^* felszálló, mert tegyük fel, hogy $||\varphi||^{\mathcal{A}} \in p^*$, $||\varphi||^{\mathcal{A}} \subseteq ||\psi||^{\mathcal{A}}$. Ha $\neg\psi \in p$ teljesülne, akkor $\mathcal{A} \not\models \exists\bar{v}(\varphi \wedge \neg\psi)$ következne, ellentétben a 2.35 definíció 2. pontjával. Tehát $||\psi||^{\mathcal{A}} \in p^*$. A metszet-zártság hasonlóan igazolható.

Fordítva, ha p^* egy ultraszűrő $\mathcal{B}$-n, akkor könnyű ellenőrizni, hogy $p = \{\varphi : ||\varphi||^{\mathcal{A}} \in p^*\}$ egy típus, és az is világos, hogy a $p \leftrightarrow p^*$ megfeleltetés bijektív. ∎

Legyen $p_0 \subseteq p \in S_{\bar{v}}^{\mathcal{A}}(X)$. Azt mondjuk, hogy p_0-t az $\bar{a} \in A$ realizálja, ha minden $\varphi \in p_0$-ra $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$, p_0 realizálható $\mathcal{A}$-ban, ha van olyan $\bar{a} \in A$, ami realizálja. A 2.35 definíció 2. pontja szerint $\mathcal{A}$ típusainak minden véges részhalmaza $\mathcal{A}$-ban realizálható. Ezt a tényt úgy is szokás hívni, hogy p „konzisztens" vagy „végesen konzisztens" $\mathcal{A}$ elméletével, illetve, hogy p végesen realizálható $\mathcal{A}$-ban. Ez lényegében azt jelenti, hogy egy típus a definiálható relációk Boole-algebrájának véges metszet tulajdonságú része. A 2.35 definíció utolsó pontja szerint a típusok maximális konzisztens formulahalmazok; ez teljesen összhangban van a 2.1 fejezet eredményeivel.

A 2.2 fejezet szerint tehát a típusok egy topologikus tér, egy Stone-tér elemei: a definiálható relációk Boole-algebrájának Stone-tere a 2.37 tétel szerint azonosítható a típusok terével. Ez az azonosítás magyarázza, miért S-el jelöltük a típusok halmazát.

$S_{\bar{v}}^{\mathcal{A}}(X)$ tehát egy kompakt Hausdorff-tér. Legyen $F_{\bar{v}}(X)$ az olyan L_X-beli formulák halmaza, melyekben legfeljebb $\bar{v}$ elemei fordulnak elő, mint szabad változók, és $\varphi \in F_{\bar{v}}(X)$-re legyen $N_\varphi = \{p \in S_{\bar{v}}^{\mathcal{A}}(X) : \varphi \in p\}$. Ekkor a 2.6 definíció utáni megjegyzés szerint $\{N_\varphi : \varphi \in F_{\bar{v}}(X)\}$ az $S_{\bar{v}}^{\mathcal{A}}(X)$ tér egy bázisa. Az egyszerűbb jelölés érdekében N_φ helyett néha egyszerűen φ-vel jelöljük a típusok terében a megfelelő elemi nyílt halmazokat.

Legyen most $\mathcal{A}$ egy struktúra, $X \subseteq A$ és $\bar{a} \in X$. Ekkor a

$$tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/X) = \{\varphi(\bar{v}, \bar{b}) \in F_{\bar{v}}(X) : \mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\}$$

formulahalmazt az $\bar{a}$ X-feletti $\mathcal{A}$-típusának nevezzük. Világos, hogy $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/X)$ egy típus (melyet $\bar{a}$ realizál is).

Feladat. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ L-struktúrák és legyen f olyan B-be képező függvény, melynek értelmezési tartománya A egy részhalmaza. Igazoljuk, hogy f akkor és csak akkor elemi leképezés, ha minden $\bar{a} \in [dom(f)]^{<\omega}$-ra $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/\emptyset) = tp^{\mathcal{B}}(f(\bar{a})/\emptyset)$.

2.38. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy L-struktúra és legyen κ egy számosság. $\mathcal{A}$-t κ-szaturáltnak nevezzük, ha minden $X \in [A]^{<\kappa}$-ra és $p \in S_1^{\mathcal{A}}(X)$-re p realizálható $\mathcal{A}$-ban. $\mathcal{A}$ szaturált, ha $|A|$-szaturált.*

Nyilvánvaló, hogy ha egy struktúra κ-szaturált, akkor minden $\lambda \leq \kappa$-ra λ-szaturált is.

2.39. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egy L-struktúra és legyen κ egy végtelen számosság. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.*

(1) $\mathcal{A}$ κ-szaturált.

(2) Minden $n \in \omega$-ra, minden $X \in [A]^{<\kappa}$-ra és $p \in S_n^{\mathcal{A}}(X)$-re p realizálható $\mathcal{A}$-ban.

Bizonyítás. (2) $\Rightarrow$ (1) nyilvánvaló, (1) $\Rightarrow$ (2)-t n szerinti indukcióval igazoljuk. Az n=1 esetben nincs mit bizonyítani.

Tegyük fel, hogy (2) igaz valamilyen $n \geq 1$-re és legyen $p \in S_{n+1}^{\mathcal{A}}(X)$. Azt kell igazolni, hogy p realizálható $\mathcal{A}$-ban. Legyen $p' = \{\exists v_n\varphi : \varphi \in p\}$. Ha $q = \{\exists v_n\varphi_0, ..., \exists v_n\varphi_{k-1}\} \in [p']^{<\omega}$, akkor –mivel p végesen realizálható – van olyan $\bar{a} \in {}^{n+1}A$, hogy $\mathcal{A} \models \wedge_{i\in k}\varphi[\bar{a}]$, ezért $\wedge q$ is realiálható $\mathcal{A}$-ban, vagyis p' végesen realizálható $\mathcal{A}$-ban. Ezért a 2.4 tétel miatt p'-nek van egy $r \in S_n^{\mathcal{A}}(X)$ kiterjesztése. Az indukciós feltevés szerint r-nek van egy $\bar{b} = \langle b_0, ..., b_{n-1}\rangle$ realizációja $\mathcal{A}$-ban. Legyen most $s = \{\varphi(b_0, ..., b_{n-1}, v_n) : \varphi(v_0, ..., v_n) \in p\}$. Hasonlóan, mint előbb, s végesen realizálható $\mathcal{A}$-ban, mert ha $s' = \{\varphi_0(b_0, ..., b_{n-1}, v_n), ..., \varphi_k(b_0, ..., b_{n-1}, v_n)\}$ akkor $\wedge_{i\in k}\varphi_i \in p$ ezért $\exists v_n(\wedge_{i\in k}\varphi_i) \in p'$ és így $\bar{b}$ ezt a formulát is realizálja, ami pont azt jelenti, hogy $\mathcal{A}$ egy alkalmas eleme s'-t realizálja. Van tehát egy $t \in S_{v_n}^{\mathcal{A}}(X \cup \{b_0, ..., b_{n-1}\})$ típus, mely kiterjeszti s-t. Mivel $|X| < \kappa$ és κ végtelen, ezért $|X \cup \{b_0, ..., b_{n-1}\}| < \kappa$ és t olyan típus, melynek formuláiban legfeljebb egy változó (nevezetesen v_n) fordul elő szabadon. Ekkor (1), azaz $\mathcal{A}$ κ-szaturáltsága miatt van olyan $c \in A$ elem, mely realizálja t-t. De ekkor $\langle b_0, ..., b_{n-1}, c\rangle$ realizálja az eredeti p-t, vagyis (2) teljesül $n + 1$-re is. ∎

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{A}$ véges struktúra, $X \subseteq A$, $p \in S_1^{\mathcal{A}}(X)$, tetszőlegesek, akkor p $\mathcal{A}$-ban realizálható.

Egyetlen végtelen $\mathcal{A}$ struktúra sem lehet $|A|^+$-szaturált, mert a $p_0 = \{x \neq c_a : a \in A\}$ formulahalmaz végesen konzisztens, ezért a 2.4 tétel szerint kiterjeszthető egy $p \in S_1^{\mathcal{A}}(A)$-beli típussá, ami $\mathcal{A}$-ban nyilvánvalóan nem realizálható. Ezek szerint egy végtelen szaturált struktúra annyira szaturált, amennyire csak lehet.

Most tisztázzuk, hogy vannak-e egyáltalan szaturált modellek, illetve, hogy adott számosságon egy teljes elméletnek legfeljebb hány szaturált modellje lehet.

2.40. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy L-struktúra, $|Form(L)| \leq \aleph_0$ és legyen $\mathcal{F}$ nemfő ultraszűrő ω-n. Ekkor a $\mathcal{B} = {}^{\omega}\mathcal{A}/\mathcal{F}$ ultrahatvány $\aleph_1$-szaturált.*

Bizonyítás. Legyen $X \in [B]^{<\aleph_1}$, minden $a \in X$-re legyen a' az a egy ${}^{I}A$-beli reprezentánsa és legyen $p \in S_1^{\mathcal{B}}(X)$ tetszőleges típus. Feltevéseink szerint p megszámlálható, mondjuk $p = \{\varphi_0(v_0, \bar{a}_0), \varphi_1(v_0, \bar{a}_1), ...\}$. A p-t realizáló elemet egyfajta diagonalizálással konstruáljuk meg. Minden $n \in \omega$-ra legyen

$$(*) \qquad J_n = \{i \in \omega : i \geq n,\ \mathcal{A} \models \exists v_0(\wedge_{k\in n}\varphi_k(v_0, \bar{a}'_k(i)))\},$$

ekkor $J_n \in \mathcal{F}$, mert p végesen realizálható $\mathcal{B}$-ben és $\mathcal{F}$ nem főszűrő. Legyen minden $n \in \omega$-ra $\gamma(n) = max\{m :\ n \in J_m\}$. A konstrukció szerint minden $n \in \omega$-ra $\gamma(n) \leq n$ úgy, hogy ha $m > \gamma(n)$, akkor $n \notin J_m$ és ha $m \leq \gamma(n)$ akkor $n \in J_m$. Ezért $(*)$ miatt minden $n \in \omega$-hoz van olyan $b_n \in A$, hogy $\mathcal{A} \models \wedge_{k\in\gamma(n)}(\varphi_k(b_n, \bar{a}'_k(n))$. Végül legyen $b = \langle b_n :\ n \in \omega\rangle/\mathcal{F}$.

Ekkor b realizálja p-t, mert legyen $\varphi_h(v_0, \bar{a}_h) \in p$ tetszőleges. Minden $n \in \cap_{k\leq h+1} J_k \in \mathcal{F}$-re $h + 1 \leq \gamma(n)$ ezért minden ilyen n-re $\mathcal{A} \models \varphi_h(b_n, \bar{a}_h(n))$ vagyis $\mathcal{B} \models \varphi(v_0, \bar{a}_h)[b]$. ∎

Az előző bizonyítás alapján esetleg azt gondolhatnánk, hogy egy végtelen L-struktúra κ-reguláris ultraszűrő szerinti ultrahatványai κ^+-szaturáltak (legalábbis, ha $|Form(L)| \leq \kappa$), hiszen ha p az ultrahatvány egy 1-típusa valamilyen κ számosságú részhalmaz felett, akkor p-ben κ darab formula van, ezeket kell egyszerre realizálni. Ez tehát κ darab feladat, melyeket az ultraszűrő κ-reguláris volta miatt szét tudunk úgy osztani, hogy minden koordinátára csak véges sok feladat jusson, ezeket a feladatokat pedig meg tudjuk oldani, hiszen p végesen realizálható.

Az előző gondolatmenet hibás !!! Ugyanis p véges részei az ultrahatványban, és nem az eredeti struktúrában realizálhatók. Ez lényeges különbség, hiszen p elemei ultrahatványbeli paramétereket tartalmazhatnak. Ha ezeket a formulákat az ultrahatvány koordináta-struktúráiban akarjuk vizsgálni, akkor előbb reprezentánsokat kell választanunk a paraméterekből. Ezek után próbáljuk alkalmazni az ultraszűrő regularitását, és tegyük fel, hogy valamelyik (mondjuk i-edik) koordinátán a véges $\gamma(i) = \{\varphi_0(v_0, \bar{b}'(i)), ..., \varphi_{n-1}(v_0, \bar{b}'(i))\}$ formulahalmazt kellene realizálni. Előfordulhat, hogy $\gamma(i)$ minden eleme az alapstruktúrában realizálható, de egyszerre az egész $\gamma(i)$ nem realizálható. Persze p minden véges részhalmaza az ultrahatványban realizálható, és így a $\{\varphi_0(v_0, \bar{b}), ..., \varphi_{n-1}(v_0, \bar{b})\}$ formulahalmaz az ultrahatvány majdnem minden koordinátájában realizálható – de hogy ezek között a koordináták között szerepel-e i is, az attól (is) függ, hogy milyen reprezentánsait választottuk a paramétereknek. A p-beli formulákhoz tartozó feladatokat tehát nem elég a regularitást használva „valahogy” szétosztani, arra is figyelni kéne, hogy milyen feladatokat kell majd aztán egyszerre megoldani.

A 2.40 tételben lényegében azt használtuk, hogy ultraszűrőnk $\aleph_0$-reguláris volt, ebből következett az $\aleph_1$-szaturáltság. Minden $n \in \omega$-ra az n. koordinátán p első n formulájából realizáltuk a leghosszabb kezdőszeletet, amit csak lehetett. Mivel p az ultrahatványban végesen realizálható volt, ezért minden ilyen kezdőszelet majdnem minden koordinátán kielégíthető volt, és mivel p összesen megszámlálható sok formulát tartalmazott, p egy rögzített formuláját e realizált kezdőszeletek majdnem mindegyike tartalmazta, ezért p realizálható volt. (Ez az utolsó lépés nem ismételhető meg, ha p megszámlálhatónál több formulát tartalmaz.)

A reguláris ultraszűrők kapcsolatba hozhatók a szaturáltság következő gyengített változatával; e kapcsolat aztán elég lesz egy, az „igazi” szaturáltsággal kapcsolatos egzisztenciatétel igazolásához.

2.41. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges struktúra, legyen κ számosság és legyen $X \subseteq A$. Ekkor $\mathcal{A}$ κ-szaturált X felett, ha minden $Y \in [X]^{<\kappa}$-ra minden $p \in S_1^{\mathcal{A}}(Y)$ típus realizálható $\mathcal{A}$-ban.*

$\mathcal{A}$ erősen κ-homogén, ha minden $X \in [A]^{<\kappa}$-ra és $f : X \to A$ elemi leképezésre teljesül, hogy $\mathcal{A}$-nak van olyan automorfizmusa, mely kiterjeszti f-t. $\mathcal{A}$ erősen homogén, ha erősen $|A|^+$-homogén.

Feladatok.1. Igazoljuk, hogy minden szaturált struktúra erősen homogén.
2. Igazoljuk, hogy egy struktúra akkor és csak akkor szaturált, ha univerzális és erősen homogén.

2.42. Tétel. *Ha $\mathcal{A}$ egy L-struktúra, $|Form(L)| \leq \kappa$ és $\mathcal{F}$ κ-reguláris ultraszűrő I-n, akkor ${}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$ κ^+-szaturált A felett (pontosabban A diagonális beágyazás szerinti képe felett).*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ adott L-struktúra és legyen $Y \in [A]^{\leq\kappa}$ egy legfeljebb κ számosságú részhalmaz. Legyen $\mathcal{B} = {}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$, és legyen $p \in S_1^{\mathcal{B}}(Y)$ tetszőleges. Mint eddig is, a jelölések egyszerűsítése érdekében A-t azonosítjuk a diagonális beágyazás szerinti képével.

A feltevések szerint $|p| \leq \kappa$. $\mathcal{F}$ κ-reguláris, ezért van egy $E \subseteq \mathcal{F}$ úgy, hogy $|E| = \kappa$ és minden $i \in I$-re $\{e \in E : i \in e\}$ véges. Van tehát egy $f : p \to E$ bijekció. Legyen minden $i \in I$-re $\gamma(i) = \{\varphi(v_0, \bar{a}) \in p : i \in f(\varphi(v_0, \bar{a}))\}$. A feltételek szerint mindegyik $\gamma(i)$ realizálható $\mathcal{B}$-ben. Viszont p formuláiban csak $Y \subseteq A$-beli paraméterek vannak, és a 2.24 tétel miatt $\mathcal{A}$ elemi része $\mathcal{B}$-nek, ezért mindegyik $\gamma(i)$ $\mathcal{A}$-ban is realizálható, legyen $b_i \in A$ egy realizáció. Végül legyen $b = \langle b_i : i \in I\rangle/\mathcal{F}$.

Ekkor b realizálja p-t, ugyanis ha $\varphi(v_0, \bar{a}) \in p$ tetszőleges formula, akkor minden $i \in f(\varphi(v_0, \bar{a}))$-ra $\varphi(v_0, \bar{a}) \in \gamma(i)$, ezért $\mathcal{A} \models \varphi(b_i, \bar{a})$, és mivel $f(\varphi(v_0, \bar{a})) \in \mathcal{F}$, ezért a Łoś-lemma miatt $\mathcal{B} \models \varphi(b, \bar{a})$. ∎

2.43. Tétel. *(Gyenge Egzisztenciatétel). Legyen T konzisztens elmélet az L nyelven és legyen $|Form(L)| \leq \kappa$ egy végtelen számosság.*

(1) Ha κ reguláris és az $\langle A_\mu : \mu < \kappa\rangle$ elemi láncban minden $\mu < \kappa$-ra teljesül, hogy $\mathcal{A}_\mu \models T$ és $A_{\mu+1}$ κ-szaturált A_μ felett, akkor a lánc limesze T egy κ-szaturált modellje.

(2) T-nek van olyan $\mathcal{C}$ modellje, mely κ^+-szaturált és $|C| \leq 2^\kappa$.

(3) T-nek van κ^+-szaturált, erősen k^+-homogén modellje (mely izomorf egy ultralánc limeszével, ha a méretet nem akarjuk kontrollálni, akkor az ultralánc első struktúrája T tetszőleges végtelen modellje lehet).

Bizonyítás. Ha T-nek csak véges modelljei vannak, akkor az állítás semmitmondó. Ezért feltesszük, hogy T-nek van végtelen modellje.

(1) igazolásához legyen a megadott lánc limesze $\mathcal{A}$. Mivel elemi láncról van szó, az 1.18 tétel miatt $\mathcal{A} \models T$. Legyen most $X \in [A]^{<\kappa}$ és legyen $p \in S_1^{\mathcal{A}}(X)$ tetszőleges. κ reguláris, ezért van olyan $\lambda < \kappa$, hogy $X \subseteq A_\lambda$, vagyis $p \in S_1^{\mathcal{A}_\lambda}(X)$. Ezért $\mathcal{A}_{\lambda+1}$-ben p-t realizálja egy alkalmas $a \in A_{\lambda+1}$ elem. Azonban $\mathcal{A}_{\lambda+1}$ elemi rész $\mathcal{A}$-ban, ezért a e bővebb struktúrában is realizálja p-t.

(2) igazolásához megadunk egy κ^+ hosszú, (1)-nek megfelelő ultraláncot. Legyen $\mathcal{F}$ reguláris ultraszűrő κ felett. Legyen $\mathcal{A}_0 \models T$ egy végtelen struktúra, melyre $|A_0| \le |Form(L)|$. Tegyük most fel, hogy minden $\lambda < \mu$-re $\mathcal{A}_\lambda$ már definiált úgy, hogy $|A_\lambda| \le 2^\kappa$.

Ha μ rákövetkező rendszám, mondjuk $\mu = \lambda + 1$, akkor $\mathcal{A}_\mu$ legyen ${}^\kappa\mathcal{A}_\lambda/\mathcal{F}$-nek az az izomorf másolata, melyben $\mathcal{A}_\lambda$ diagonális beágyazás szerinti képét elemenként kicseréltük A_λ megfelelő elemére. A 2.42 tétel szerint ekkor $\mathcal{A}_\mu$ κ^+-szaturált $\mathcal{A}_\lambda$ felett. Ekkor a 2.29 tétel és az indukciós feltevés szerint $|A_\mu| \le (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa^2} = 2^\kappa$.

Ha μ limeszrendszám, akkor legyen $\mathcal{A}_\mu = \cup_{\lambda<\mu}\mathcal{A}_\lambda$. Most is teljesül, hogy $|A_\mu| \le |\mu| \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$.

Az $\langle \mathcal{A}_\lambda : \lambda < \kappa^+ \rangle$ ultralánc egy elemi lánc, ezért (1) miatt ennek $\mathcal{C}$ limesze T-nek egy κ^+-szaturált modellje. Végül $|C| \le \kappa^+ \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$, ahogy állítottuk.

(3) bizonyításához szintén egy ultraláncot fogunk használni. Mint előbb, legyen $\mathcal{A}_0$ egy végtelen modellje T-nek. Ha $\mu < \kappa^+$ és minden $\lambda < \mu$-re $\mathcal{A}_\mu$ már definiált és λ limeszrendszám, akkor legyen $\mathcal{A}_\lambda = \cup_{\mu<\lambda} A_\mu$; ha pedig λ rákövetkező, mondjuk $\lambda = \mu + 1$, akkor Legyen $\mathcal{F}$ egy $max\{\kappa, |A_\mu|\}$-reguláris ultraszűrő és legyen $\mathcal{A}_\lambda$ az $\mathcal{A}_\mu$ $\mathcal{F}$ szeriniti ultrahatványának az az izomorf másolata, melyben A_μ diagonális beágyazás szerinti képét kicseréltük A_μ megfelelő elemeire. Legyen végül $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\kappa^+}$, vagyis az ultralánc limesze.

A 2.42 tétel szerint mindegyik $\mathcal{A}_{\mu+1}$ szaturált $\mathcal{A}_\mu$ felett, ezért (1) miatt $\mathcal{A}$ κ^+-szaturált. Legyen most $X \in [A]^{\le\kappa}$ tetszőleges, és legyen $f : X \to A$ egy elemi leképezés. Meg kell mutatnunk, hogy $\mathcal{A}$ egy alkalmas automorfizmusa kiterjeszti f-t. Mivel $|X| < cf(\kappa^+) = k^+$, van olyan $\nu < \kappa^+$, melyre $X, range(f) \subseteq A_\nu$. Mivel $\mathcal{A}_\nu$ az $\mathcal{A}$ egy elemi része, ezért f egy elemi leképezés $\mathcal{A}_\nu$-ben is. Emiatt $\mathcal{A}'_\nu = \langle \mathcal{A}_\nu, c \rangle_{c \in dom(f)} \equiv_e \langle \mathcal{A}_\nu, f(c) \rangle_{c \in dom(f_\nu)} \equiv_e \langle \mathcal{A}_{\nu+1}, f(c) \rangle_{c \in dom(f)} = \mathcal{A}'_{\nu+1}$. Ugyanakkor a 2.32 tétel miatt ez utóbbi struktúra $|A_\nu|^+$-univerzális, ezért van egy $f_\nu : A_\nu \to A_{\nu+1}$ függvény, mely $\mathcal{A}'_\nu$-t elemien beágyazza $\mathcal{A}'_{\nu+1}$-be. Világos, hogy f_ν kiterjeszti f-t.

Tegyük most fel, hogy $\lambda < \kappa$ és definiáltuk már elemi leképezések egy növő $\langle f_\mu : \nu \le \mu < \lambda \rangle$ sorozatát úgy, hogy $dom(f_\mu) = A_\mu$, $range(f_\mu) \subseteq A_{\mu+1}$. Ha λ limeszrendszám, akkor legyen $f_\lambda = \cup_{\nu \le \mu < \lambda} f_\mu$, ha pedig $\lambda = \mu + 1$ rákövetkező, akkor mivel f_μ elemi leképezés, $\mathcal{A}'_{\mu+1} = \langle \mathcal{A}_{\mu+1}, c \rangle_{c \in dom(f_\mu)} \equiv_e \langle \mathcal{A}_{\mu+2}, f_\mu(c) \rangle_{c \in dom(f_\mu)} = \mathcal{A}'_{\mu+2}$, ezért $\mathcal{A}_{\mu+2}$ $|A_{\mu+1}|^+$-univerzalitása miatt van egy $f_\lambda : \mathcal{A}'_{\mu+1} \to \mathcal{A}'_{\mu+2}$ elemi beágyazás, ez kiterjeszti f_μ-t. Ezzel f_λ-t definiáltuk minden $\nu \le \lambda \le \kappa^+$-ra.

Végül világos, hogy f_{κ^+} a keresett automorfizmus. ∎

Az általánosított kontinuum-hipotézis (röviden gch) szerint minden végtelen κ számosságra teljesül, hogy $\kappa^+ = 2^\kappa$. Ezért gch esetén az előbbi tétel miatt minden elméletnek van szaturált modellje. Ez gch nélkül nem igaz: van olyan elmélet (egy véges nyelven), melynek minden $\mathcal{A}$ modelljében minden végtelen $\kappa \leq |A|$-ra és minden $X \in [A]^\kappa$ halmazra teljesül, hogy

$$(*) \qquad |S_1^{\mathcal{A}}(X)| = 2^\kappa,$$

ennyi különböző típus realizációjához legalább 2^κ különböző elem kell, tehát egy ilyen elmélet κ^+-szaturált modelljei mind legalább 2^κ számosságúak. Az 5.1 alfejezetben meg fogunk adni egy olyan elméletet, melyre $(*)$ teljesül. Ennek az elméletnek sok más érdekes tulajdonsága is lesz.

ZFC-ben κ^+ és 2^κ között lehetnek még további számosságok, ezért a 2.43 tétel nem garantálja szaturált modellek létezését, és az előbb említett tétel kizárja, hogy ilyen általánosságban többet lehessen mondani. Ugyanakkor az nincs kizárva, hogy bizonyos „szép" elméleteknek mégis legyenek szaturált modelljei. Ilyenekre a 6.2 fejezetben látunk majd példákat.

2.44. Tétel. *(Unicitástétel.)*

(1) Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ elemien ekvivalens, azonos számosságú szaturált modellek. Ekkor $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

(2) Ha κ végtelen számosság és $\mathcal{A}$ κ-szaturált, akkor κ^+-univerzális is.

Bizonyítás. (1)-hez tegyük fel, hogy $\kappa = |A| = |B|$, közelebbről $A = \{a_\lambda : \lambda < \kappa\}$ és $B = \{b_\lambda : \lambda < \kappa\}$. Meg fogjuk adni elemi leképezések egy $\langle f_\lambda : \lambda \leq \kappa\rangle$ olyan sorozatát, melyre teljesül, hogy minden $\mu < \lambda \leq \kappa$ esetén

(a) $\quad f_\mu \subseteq f_\lambda$,
(b) $\quad a_\mu \in dom(f_\lambda), b_\mu \in range(f_\lambda)$,
(c) $\quad \langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in dom(f_\lambda)} \equiv_e \langle \mathcal{B}, f_\lambda(a)\rangle_{a\in dom(f_\lambda)}$,
(d) $\quad |f_\lambda| \leq |\lambda| + \aleph_0$.

Ez elég, mert ekkor f_κ a kívánt izomorfizmus. Az elemi leképezések sorozatát transzfinit rekurzióval adjuk meg. Tegyük fel, hogy minden $\mu < \lambda$-ra f_μ adott már.

Ha λ limeszrendszám, akkor legyen $f_\lambda = \cup_{\mu<\lambda} f_\mu$. Ekkor (a) és (b) nyilvánvalóan érvényben marad, (c) azért marad érvényben, mert ha $\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in dom(f_\lambda)} \models \varphi$, akkor mivel λ limeszrendszám, van olyan $\eta < \lambda$, hogy φ-ben legfeljebb az $\{a_\mu : \mu < \eta\}$ elemeit jelölő konstansszimbólumok szerepelnek, ezért $\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in dom(f_\eta)} \models \varphi$ és így az indukciós feltevés (pontosabban (c) η-ra vonatkozó példánya) miatt $\langle \mathcal{B}, f_\eta(a)\rangle_{a\in dom(f_\eta)} \models \varphi$ azaz (a) miatt $\langle \mathcal{B}, f_\lambda(a)\rangle_{a\in dom(f_\lambda)} \models \varphi$. Végül (d) is érvényben marad, mert $|f_\lambda| \leq \Sigma_{\mu<\lambda}|f_\mu| \leq \Sigma_{\mu<\lambda}|\mu| + \aleph_0 \leq \Sigma_{\mu<\lambda}|\lambda| + \aleph_0 \leq |\lambda| \cdot (|\lambda| + \aleph_0) = |\lambda| + \aleph_0$.

Ha λ rákövetkező rendszám, mondjuk $\lambda = \mu+1$, akkor legyen $p = tp^{\mathcal{A}}(a_\mu/dom(f_\mu))$ és legyen $p' = \{\varphi(v_0, f_\mu(\bar{a})) : \varphi(v_0, \bar{a}) \in p\}$. Ekkor (c) μ-re vonatkozó példánya szerint p' egy $range(f_\mu)$ feletti típus $\mathcal{B}$-ben.

(Ezt részletesebben is megmutatjuk ebben a bekezdésben: csak az okozhat problémát, hogy p' miért lesz végesen realizálható $\mathcal{B}$-ben. Ezt így gondolhatjuk át: ha $q = \{\varphi_0(v_0, f_\mu(\bar{a}_0)), ..., \varphi_{n-1}(v_0, f_\mu(\bar{a}_{n-1}))\} \in [p']^{<\omega}$, akkor a konstrukció miatt

$$\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in dom(f_\mu)} \models \wedge_{i\in n}\varphi_i(a_\mu, \bar{a}_i)$$

ezért $\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in dom(f_\mu)} \models \exists v_0(\wedge_{i\in n}\varphi_i(v_0, \bar{a}_i))$. De ekkor ez utóbbi formula (c) μ-edik példánya miatt $\langle \mathcal{B}, f_\mu(a)\rangle_{a\in dom(f_\mu)}$-ben is igaz, vagyis q realizálható $\mathcal{B}$-ben.)

Továbbá (d) miatt $|range(f_\mu)| < \kappa$ és $\mathcal{B}$ szaturált. Ezért van egy $b \in B$, mely realizálja p'-t. Legyen f' f_μ-nek az a kiterjesztése, mely a_μ-t b-re képezi. Ekkor f' egy elemi leképezés, mert

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in dom(f_\mu)} \models \varphi(a_\mu, \bar{a}) \Leftrightarrow\\
&\varphi(v_0, \bar{a}) \in tp^{\mathcal{A}}(a_\mu/dom(f_\mu)) \Leftrightarrow\\
&\varphi(v_0, f_\mu(\bar{a})) \in p' \Leftrightarrow\\
&\langle \mathcal{B}, f_\mu(a)\rangle_{a\in dom(f_\mu)} \models \varphi(b, f_\mu(\bar{a})).
\end{aligned}$$

Az elemi leképezések mindig injektív függvények. Ezért teljesen hasonlóan, van olyan $c \in A$ elem, hogy f'-nek az a kiterjesztése, mely c-t b_μ-re képezi elemi leképezés lesz. Legyen f_λ ez az elemi leképezés. Ekkor (a) és (b) nyilvánvalóan érvényben marad, (c) azért marad érvényben mert f_λ elemi leképezés és (d) azért, mert $|f_\lambda| \leq 2 + |f_\mu| \leq 2 + |\mu| + \aleph_0 \leq 2 + |\lambda| + \aleph_0 = |\lambda| + \aleph_0$.

Ezzel a kívánt elemi leképezéseket megkonstruáltuk.

(2) igazolása hasonlóan történhet: legyen $\mathcal{B}$ egy $\mathcal{A}$-val elemien ekvivalens struktúra, melyre $|B| \leq \kappa$. Az elemi leképezések konstrukciójánál ugyanúgy járunk el, mint az előbb, kivéve, hogy rákövetkező lépésekben csak B soronkövetkező elemének keresünk képet A-ban (fordítva nem is tudnánk, hiszen $\mathcal{B}$-ről semmilyen szaturáltságot sem tettünk fel). Ekkor f_κ inverze $\mathcal{B}$ egy elemi beágyazása lesz. ∎

Ezek szerint, adott végtelen számosságon egy teljes elmélet szaturált modellje (ha van ilyen egyáltalán) izomorfizmus erejéig egyértelmű.

Megjegyezzük továbbá, hogy az előbbi bizonyítás során, mikor a rákövetkező rendszámoknak megfelelő lépésekben kiterjesztünk egy f elemi leképezést, lényegében csak annyit használunk, hogy az új elem $dom(f)$ felett ugyanazokat az *egzisztenciális* formulákat elégíti ki, mint képe $range(f)$ felett. Tehát nem szükséges feltenni teljes elsőrendű típusaik egyezését.

Most az Unicitástétel egy egyszerű következményét ismertetjük, melynek aztán sokféle általánosítását is igazoljuk majd.

2.45. Tétel. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ megszámlálható L-struktúrák valamilyen megszámlálható L nyelven, és tegyük fel a kontinuum-hipotézist. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.*

(1) $\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B}$.

(2) Ha $\mathcal{F}$ nemfő ultraszűrő ω-n, akkor ${}^{\omega}\mathcal{A}/\mathcal{F} \cong {}^{\omega}\mathcal{B}/\mathcal{F}$.

Bizonyítás. (2) $\Rightarrow$(1) azért igaz, mert $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ elemien ekvivalensek minden ultrahatványukkal, ezért (2) esetén egymással is.

(1) $\Rightarrow$ (2) is könnyen adódik az eddigiekből: a 2.40 tétel miatt az $\mathcal{A}' = {}^{\omega}\mathcal{A}/\mathcal{F}$ és $\mathcal{B}' = {}^{\omega}\mathcal{B}/\mathcal{F}$ ultrahatványok $\aleph_1$-szaturáltak és (1) miatt elemien ekvivalensek. Továbbá mivel ω-n minden nemfő ultraszűrő reguláris, ezért a 2.29 tétel miatt $|A'| = |B'| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (ez utóbbi a kontinuum-hipotézis miatt). Tehát $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$ elemien ekvivalens szaturált struktúrák, ezért a 2.44 tétel miatt izomorfak is. ∎

E tétel után természetes kérdés, hogy vajon *minden* elemien ekvivalens struktúrapárnak vannak-e izomorf ultrahatványai, vagyis hogy a 2.34 tételből elhagyhatók-e az ultraláncok. Meg fogjuk mutatni, hogy a válasz igenlő. Először *gch* feltételezése mellett próbáljuk a 2.45 tételt tetszőleges (megszámlálhatónál nagyobb) struktúrákra általánosítani.

Ehhez azt a kérdést kell tisztázni, hogy alkalmas ultraszűrőket használva kaphatunk-e eléggé szaturált ultraszorzatokat. A 2.40 tétel bizonyítása utáni megjegyzés szerint az ultraszűrő regularitása ehhez kevés. Egy adott típus realizációjához úgy kéne szétosztani az egyes „feladatokat”, hogy a közös koordinátára került formulák egyszerre is realizálhatók legyenek, ugyanakkor az, hogy az egyes formulákat mely koordinátákon akarjuk realizálni, csak az illető formulától függjön (más formuláktól már ne függjön). Ez motiválja a következő definíciókat.

2.46. Definíció. *Legyen $\mathcal{F}$ ultraszűrő és legyen κ egy számosság. Az $f : [\kappa]^{<\omega} \to \mathcal{F}$ függvény monoton, ha $x \subseteq y \in [\kappa]^{<\omega}$ esetén $f(y) \subseteq f(x)$. f additív, ha $x, y \in [\kappa]^{<\omega}$ esetén $f(x \cup y) = f(x) \cap f(y)$. Végül $g : [\kappa]^{<\omega} \to \mathcal{F}$ az f finomítása, ha minden $x \in [\kappa]^{<\omega}$-ra $g(x) \subseteq f(x)$.*

Az előbbi definícióban a „monoton” helyett talán az „antimonoton”, additív helyett talán az „antiadditív” helyesebb volna, de tartjuk magunkat az irodalomban elterjedt elnevezésekhez. Nyilvánvaló, hogy az additív függvények monotonok is.

Vegyük észre, hogy tetszőleges $h : [\kappa]^{<\omega} \to \mathcal{F}$ függvénynek van monoton finomítása: az $f : [\kappa]^{<\omega} \to \mathcal{F}$, $f(x) = \cap_{y \subseteq x} h(y)$ egy ilyen monoton finomítás.

2.47. Definíció. *Legyen κ számosság és legyen $\mathcal{F}$ ultraszűrő az I halmaz felett. $\mathcal{F}$ κ-jó, ha minden $\mu < \kappa$-ra minden $f : [\mu]^{<\omega} \to \mathcal{F}$ függvénynek van egy additív finomítása. $\mathcal{F}$ jó, ha $|I|^+$-jó.*

Az $\mathcal{F}$ szűrő κ-teljes, ha akárhogyis veszünk κ-nál kevesebb halmazt $\mathcal{F}$-ből, ezek metszete is $\mathcal{F}$-beli lesz.

Világos, hogy minden szűrő $\aleph_0$-teljes, és egy κ-jó ultraszűrő minden $\lambda < \kappa$-ra λ-jó is, valamint hogy az előbbi definícióban elég lett volna azt előírni, hogy a monoton függvényeknek van additív finomítása.

ZFC-ben nem bizonyítható, hogy vannak $\aleph_1$-teljes nemfő ultraszűrők. E kérdés messzire vezetne, melyre nem akarunk kitérni, de a problémakörrel kapcsolatban [6]-ra utalunk.

Feladatok. 1. Igazoljuk, hogy ω-n minden nemfő ultraszűrő $\aleph_1$-jó.
2. Igazoljuk, hogy egyetlen I feletti nemfő ultraszűrő sem $|I|^{++}$-jó.
3. Igazoljuk, hogy a $[0,1]$ intervallum 1 Lebesgue-mértékű részhalmazai $\aleph_1$-teljes szűrőt generálnak.

Ezek szerint egy jó ultraszűrő annyira jó, amennyire csak lehet.

2.48. Tétel. *Legyen I halmaz, és minden $i \in I$-re legyen $\mathcal{A}_i$ egy L-struktúra. Ha $|Form(L)| \leq \kappa$ és $\mathcal{F}$ egy κ^+-jó és nem $\aleph_1$-teljes ultraszűrő I felett, akkor a $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}$ ultraszorzat κ^+-szaturált.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A} = \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}$ és minden $a \in A$-ra legyen $a' \in \Pi_{i\in I}A_i$ az a egy reprezentánsa. Legyen $X \in [A]^\kappa$ és legyen $p \in S_1^{\mathcal{A}}(X)$ egy típus. Meg kell mutatnunk, hogy p realizálható $\mathcal{A}$-ban.

Mivel $\mathcal{F}$ nem $\aleph_1$-teljes, ezért van olyan $\langle I_n \in \mathcal{F}, n \in \omega\rangle$ sorozat, melyre $J = \cap_{n\in\omega} I_n \notin \mathcal{F}$. Legyen $J_n = \cap_{m\leq n} I_n - J$, ekkor minden $n \in \omega$-ra $J_n \in \mathcal{F}$, $J_n \subseteq J_{n+1}$ és

$$(*) \qquad \cap_{n\in\omega}\, J_n = \emptyset.$$

Minden $p_0 = \{\varphi_0(v_0, \bar{a}_0), ..., \varphi_{n-1}(v_0, \bar{a}_{n-1})\} \in [p]^{<\omega}$-ra legyen

$$(**) \qquad f(p_0) = J_{|p_0|} \cap \{i \in I : \mathcal{A}_i \models \exists v_0(\wedge_{k\in n}\varphi_k(v_0, \bar{a}'_k(i)))\}.$$

f értékkészlete $\mathcal{F}$-beli, mert p végesen realizálható $\mathcal{A}$-ban. Most használjuk, hogy $\mathcal{F}$ κ^+-jó: mivel $|p| \leq \kappa$, van f-nek egy g additív finomítása. Legyen minden $i \in I$-re $\gamma(i) = \{\varphi(v_0, \bar{a}) \in p : \; i \in g(\varphi(v_0, \bar{a}))\}$.

Figyeljük meg, hogy ha $\phi_0, ..., \phi_{n-1} \in \gamma(i)$, akkor

$$(***) \qquad i \in \cap_{k\in n} g(\phi_k) = g(\{\phi_0, ..., \phi_{n-1}\}) \subseteq f(\{\phi_0, ..., \phi_{n-1}\}) \subseteq J_n.$$

De az $i \in J_n$ feltétel rögzített i-re $(*)$ miatt csak véges sok n-re teljesülhet. Ez azt jelenti, hogy minden $i \in I$-re $\gamma(i)$ egy véges halmaz.

Most megmutatjuk, hogy a $\gamma(i)$ formulahalmazok mindig realizálhatók $\mathcal{A}_i$-ben. Ha $\gamma(i) = \{\phi_0, ..., \phi_{n-1}\}$ akkor $(***)$ miatt $i \in f(\{\phi_0, ..., \phi_{n-1}\}) = f(\gamma(i))$ azaz $(**)$ miatt van olyan $b_i \in A_i$, mely realizálja $\gamma(i)$-t $\mathcal{A}_i$-ben. Végül legyen $b = \langle b_i : i \in$

$I\rangle/\mathcal{F}$.

Megmutatjuk, hogy b realizálja p-t $\mathcal{A}$-ban. Legyen $\varphi(v_0, \bar{a}) \in p$ tetszőleges, elég igazolni, hogy $\mathcal{A}$-ban ezt a formulát b kielégíti. Minden $i \in g(\varphi(v_0, \bar{a}))$-ra $\varphi(v_0, \bar{a}) \in \gamma(i)$ ezért $\mathcal{A}_i \models \varphi(b_i, \bar{a}'(i))$. Mivel $g(\varphi(v_0, \bar{a})) \in \mathcal{F}$, ezért a Łoś-lemma miatt $\mathcal{A} \models \varphi(v_0, \bar{a})$. ∎

Most rátérünk a jó ultraszűrők konstrukciójára. Ehhez egy sor definíción és lemmán át vezet az út. Először jegyezzük meg, hogy legegyszerűbben úgy állíthatunk elő $h : [\kappa]^{<\omega} \to \mathcal{P}(\lambda)$ típusú additív függvényeket, hogy λ minden i elemére megadjuk, hogy melyik az a legbővebb halmaz $[\kappa]^{<\omega}$-ban, melynek h szerinti képe még tartalmazza i-t. Valóban, ha $g : \lambda \to [\kappa]^{<\omega}$ tetszőleges függvény, akkor a $h : [\kappa]^{<\omega} \to \mathcal{P}(\lambda)$, $h(w) = \{i \in \lambda : w \subseteq g(i)\}$ egy additív függvény lesz.

Az a célunk, hogy az előbbi ötletet (és variánsait) használva transzfinit rekurzióval építsünk fel egy jó ultraszűrőt. A transzfinit konstrukció során sok olyan g függvényre lesz szükségünk, melyekből az előbbi mintára additív h függvényeket állítunk elő. Ráadásul ezeknek a g-knek egymástól kellőképp különbözniük kell, hogy a transzfinit konstrukció során mindig találjunk megfelelőt a folytatáshoz. Ez motiválja a következő definíciót.

2.49. Definíció. *Legyenek I és J adott halmazok, $\mathcal{F}$ szűrő I felett és legyen μ végtelen számosság. A $G \subseteq {}^J I$ függvényhalmaz μ-független $\mathcal{F}$ felett (jelölés: $G \perp_\mu \mathcal{F}$), ha minden $\alpha < \mu$-re igaz, hogy akárhogy is vesszük páronként különböző G-beli függvények egy $\langle g_\gamma : \gamma < \alpha\rangle$ és I-beli elemek egy $\langle j_\gamma : \gamma < \alpha\rangle$ sorozatát, minden $X \in \mathcal{F}$-nek van olyan $i \in X$ eleme, hogy*

$$(\forall \gamma < \alpha) g_\gamma(i) = j_\gamma.$$

Ha G egy μ-független függvényhalmaz $\mathcal{F}$ felett, akkor akárhogy is veszünk G-ből μ-nél kevesebb függvényt, ezek a függvények „együtt is szürjektívek" $\mathcal{F}$ minden X elemén.

2.50. Lemma. *Tegyük fel, hogy β, λ és μ olyan végtelen számosságok, hogy ha $\nu < \mu$ akkor $\lambda^\nu \leq \lambda$, $\beta^\nu \leq \lambda$.*

(1) Van olyan $G \subseteq {}^\lambda\beta$, hogy $|G| = 2^\lambda$ és $G \perp_\mu \{\lambda\}$.

(2) Van olyan nem $\aleph_1$-teljes $\mathcal{F}$ szűrő λ felett és olyan $G \subseteq {}^\lambda\lambda$, hogy $|G| = 2^\lambda$ és G μ-független $\mathcal{F}$ felett.

Bizonyítás. (1) bizonyításához először is figyeljük meg, hogy a G-beli függvények értelmezési tartományát szabadon megváltoztathatjuk egy tetszőleges λ számosságú I halmazra, hiszen a feltétel csak annyit mond, hogy ha G-ből akárhogy veszünk μ-nél kevesebb függvényt, és ezek értékeit előírjuk, akkor lesz az értelmezési tartománynak olyan pontja, ahol a függvények mind az előírt értékeket veszik fel.

Mivel 2^λ függvényt kell előállítanunk, e függvényeket λ részhalmazaival fogjuk indexelni. A feladatunk tehát a következő: ha λ részhalmazainak egy μ-nél rövidebb sorozatát vesszük, és e sorozat minden eleméhez előírunk egy β-beli értéket, akkor találnunk kell az értelmezési tartományban egy olyan pontot, melyben a λ részhalmazaival indexelt függvényeink épp az előírt értékeket veszik fel. Ezért az lehet az első ötletünk, hogy az I értelmezési tartomány álljon az összes μ-nél rövidebb sorozatok párjaiból; az első sorozat megadná a λ-beli részhalmazokat, a második pedig az itt előírt függvényértékeket. Sajnos azonban így $|I|$ nagyobb lenne λ-nál. Viszont egyszerre úgyis csak μ-nél kevesebb függvény értékét kell eltalálnunk, ezért λ részhalmazai közül elég a μ-nél kisebbeket venni. Ezt az ötletet valósítja meg a következő konstrukció.

Legyen

$$I = \{\langle h, v\rangle : \ h : \alpha \to \mathcal{P}(\lambda) \text{ injektív}, v : \alpha \to \beta, \alpha < \mu, |\cup_{\gamma<\alpha} h(\gamma)| < \mu\}.$$

Rögzített α esetén v-ből $\beta^{|\alpha|} \leq \lambda$ darab lehet, h-t pedig úgy képzelhetjük, hogy előbb kiválasztjuk λ egy μ-nél kisebb E részhalmazát, ez lesz $\cup_{\gamma<\alpha} h(\gamma)$, majd E-ből választunk α darab részhalmazt, ezek lesznek h értékei. Megint, rögzített α-ra E-t legfeljebb λ féleképpen választhatjuk, és rögzített E-re h-t legfeljebb $|{}^{\alpha}E| \leq \lambda^{|\alpha|} \leq \lambda$ módon választhatjuk. Tehát rögzített α-ra az I-beli párok száma legfeljebb λ, és mivel α csak $\mu \leq \lambda$ darab értéket vehet fel, ezért $|I| = \lambda$. Legyen most minden $J \subseteq I$-re $f_J : I \to \beta$ a következő függvény. Ha $\langle h, v\rangle \in I$, akkor legfeljebb egy olyan $\sigma < \alpha$ lehet, melyre $J \cap (\cup range(h)) = h(\sigma)$.

Ha van ilyen σ, akkor legyen $f_J(\langle h, v\rangle) = v(\sigma)$,
ha nincs, akkor legyen $f_J(\langle h, v\rangle) = 0$.

Belátjuk, hogy a $G = \{f_J : J \subseteq \lambda\}$ függvényhalmaz eleget tesz az állításnak.

Legyen $\alpha < \mu$ és legyenek $\langle J_\gamma \subseteq \lambda : \gamma < \alpha\rangle$, $\langle v_\gamma \in \beta : \gamma < \alpha\rangle$ adott sorozatok úgy, hogy $\gamma_1 \neq \gamma_2$ esetén $J_{\gamma_1} \neq J_{\gamma_2}$. Ha megmutatjuk, hogy van olyan $e = \langle h, v\rangle \in I$, hogy minden $\gamma < \alpha$-ra $f_{J_\gamma}(e) = v_\gamma$, akkor azt is beláttuk, hogy $J \neq K$ esetén $f_J \neq f_K$, vagyis, hogy $|G| = 2^\lambda$ és persze G μ-független $\{\lambda\}$ felett.

Minden különböző $\gamma_1, \gamma_2 < \alpha$ párra van olyan $c \in \lambda$, hogy c pontosan az egyik halmaznak eleme J_{γ_1} és J_{γ_2} közül, mert különböző γ-kra a J_γ-k különbözők. E megkülönböztető c elemeket összegyűjtve, van egy olyan C halmazunk, melyre egyrészt $|C| \leq |\alpha|^2 < \mu$, másrészt minden $\gamma_1 \neq \gamma_2$ esetén $J_{\gamma_1} \cap C \neq J_{\gamma_2} \cap C$. Legyen $h(\gamma) = J_\gamma \cap C$, ekkor $e = \langle h, v\rangle \in I$ és a konstrukció miatt minden $\gamma < \alpha$-ra $f_{J_\gamma}(e) = v_\gamma$, ahogy állítottuk.

(2) ezek után egyszerű: (1) szerint van $G \subseteq {}^{\lambda}\lambda$ úgy, hogy $|G| = 2^\lambda$ és $G \perp_\mu \lambda$. Legyen $I = \lambda \times \omega$ és minden $g \in G$-re legyen $g' : I \to \lambda$, $g'(i, n) = g(i)$. Ekkor $|I| = \lambda$ és $g_1 \neq g_2$ esetén $g_1' \neq g_2'$, ezért $G' = \{g' : g \in G\}$-re $|G'| = |G| = 2^\lambda$.

Legyen minden $n \in \omega$-ra $I_n = \{\langle i, m\rangle \in I : n \leq m\}$. Ekkor az $\{I_n : n \in \omega\}$ halmazrendszer véges metszet tulajdonságú, legyen a generált szűrő $\mathcal{F}$:

$$(*) \qquad \mathcal{F} = \{X \subseteq I : (\exists n \in \omega) I_n \subseteq X\}.$$

Mivel $\bigcap_{n\in\omega} I_n = \emptyset$, ezért $\mathcal{F}$ nem $\aleph_1$-teljes. Végül, ha $\alpha < \mu$, $\langle f'_\gamma \in G' : \gamma < \alpha\rangle$ páronként különböző, $\langle j_\gamma \in \lambda : \gamma < \alpha\rangle$ és $X \in \mathcal{F}$ adottak, akkor $(*)$ miatt van olyan $n \in \omega$ hogy $I_n \subseteq X$ és G μ-függetlensége miatt van olyan $r \in \lambda$, hogy minden $\gamma < \alpha$-ra $f_\gamma(r) = j_\gamma$. De ekkor $\langle r, n\rangle \in J_n \subseteq X$ és minden $\gamma < \alpha$-ra $f'_\gamma(r,n) = f_\gamma(r) = j_\gamma$, vagyis $G' \perp_\mu \mathcal{F}$. ∎

Feladatok. 1. Legyen I végtelen halmaz, és nevezzük a $V \subseteq \mathcal{P}(I)$ halmazrendszert I felett függetlennek, ha bármely diszjunkt és véges $A, B \subseteq V$-re teljesül, hogy van olyan $a \in I$ mely A minden elemében benne van, de B egyetlen elemében sincs benne. Igazoljuk, hogy van $2^{|I|}$ számosságú I felett független halmazrendszer.
2. Az előző feladat felhasználásával igazoljuk, hogy ha I végtelen halmaz, akkor I felett van $2^{2^{|I|}}$ különböző ultraszűrő.

Ha $U \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ véges metszet tulajdonságú halmazrendszer, akkor $[U]$ jelöli az U által generált szűrőt.

2.51. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ szűrő λ felett, és $G \subseteq {}^\lambda\beta$ úgy, hogy $G \perp_\mu \mathcal{F}$ (μ végtelen számosság). Ha $X \subseteq \lambda$, akkor van olyan $G' \subseteq G$, hogy $|G'| < \mu$ és*

$$G - G' \perp_\mu [\mathcal{F} \cup \{X\}] \qquad \textit{vagy} \qquad G - G' \perp_\mu [\mathcal{F} \cup \{\lambda - X\}].$$

Bizonyítás. Ha $\mathcal{F} \cup \{X\}$ véges metszet tulajdonságú és G μ-független a generált szűrő felett, akkor $G' = \emptyset$ válsztással készen vagyunk. Ezért feltehető, hogy van $Z \in \mathcal{F}$, $\alpha < \mu$, és minden $\gamma < \alpha$-ra van páronként különböző $f_\gamma \in G$ és $v_\gamma \in \beta$ úgy, hogy

$$(1) \qquad X \cap Z \cap \{i \in \lambda : (\forall \gamma < \alpha) f_\gamma(i) = v_\gamma\} = \emptyset.$$

Legyen $G' = \{f_\gamma : \gamma < \alpha\}$. Állítjuk, hogy ekkor $\mathcal{F} \cup \{\lambda - X\}$ véges metszet tulajdonságú, és $G - G'$ μ-független a generált szűrő felett. Ha nem ez volna a helyzet, akkor lenne egy $\delta < \mu$, $Y \in \mathcal{F}$ és minden $\gamma < \delta$-ra lennének páronként különböző $g_\gamma \in G - G'$ és $w_\gamma \in \beta$ úgy, hogy

$$(2) \qquad (\lambda - X) \cap Y \cap \{i \in \lambda : (\forall \gamma < \delta) g_\gamma(i) = w_\gamma\} = \emptyset.$$

Ugyanakkor $G \perp_\mu \mathcal{F}$ és $|\alpha| + |\delta| < \mu$, ezért van olyan $i \in Z \cap Y \subseteq \lambda$, hogy minden $\gamma < \alpha$-ra $f_\gamma(i) = v_\gamma$ és minden $\gamma < \delta$-ra $g_\gamma(i) = w_\gamma$. De ekkor (1) miatt $i \notin X$ és (2) miatt $i \notin (\lambda - X)$, ellentmondás. ∎

A következőkben $\aleph_0$-független függvényhalmaz helyett röviden független függvényhalmazt írunk.

2.52. Lemma. *Legyen $\mathcal{F}$ szűrő λ felett, $G \subseteq {}^{\lambda}\lambda$ független $\mathcal{F}$ felett, $|G| \geq 2$, legyen $f : [\lambda]^{<\lambda} \to \mathcal{F}$ monoton függvény és legyen $g \in G$ tetszőleges. Ekkor van olyan $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ szűrő és van additív $f' : [\lambda]^{<\lambda} \to \mathcal{F}'$ mely finomítása f-nek és melyre $G - \{g\}$ független $\mathcal{F}'$ felett.*

Bizonyítás. Legyen $\{w_\alpha : \alpha < \lambda\}$ a $[\lambda]^{<\omega}$ egy felsorolása. A 2.49 definíció előtti megjegyzéssel analóg módon g-ből előállítunk egy additív függvényt, és arra is figyelünk, hogy ez f egy finomítása legyen. Tehát minden $w \in [\lambda]^{<\omega}$-ra legyen

$$f'(w) = \{i \in \lambda : \ i \in f(w_{g(i)}), \ w \subseteq w_{g(i)}\}.$$

Ekkor f' az f egy finomítása, mert ha $i \in f'(w)$, akkor a w-nél bővebb $w_{g(i)}$-re $i \in f(w_{g(i)})$ és ezért f monotonitása miatt $i \in f(w)$ vagyis $f'(w) \subseteq f(w)$. Továbbá f' additív, mert ha $v, w \in [\lambda]^{<\omega}$ akkor

$$\begin{aligned} &i \in f'(v \cup w) \Leftrightarrow i \in f(w_{g(i)}), v \cup w \subseteq w_{g(i)} \Leftrightarrow \\ &i \in f(w_{g(i)}), v \subseteq w_{g(i)}, w \subseteq w_{g(i)} \Leftrightarrow i \in f'(v) \cap f'(w). \end{aligned}$$

Legyenek most $f_0, ..., f_{n-1} \in G - \{g\}$ páronként különbözők és legyen $X \in \mathcal{F}$, $i_0, ..., i_{n-1} \in \lambda$ és $w \in [\lambda]^{<\omega}$. Megmutatjuk, hogy van olyan $j \in X \cap f'(w)$, hogy $f_0(j) = i_0, ..., f_{n-1}(j) = i_{n-1}$. Ez a következők miatt van így. Valahol w-t is felsoroltuk a bizonyítás elején rögzített sorozatban. Ezért van olyan $\alpha < \lambda$, hogy $w = w_\alpha$. G $\mathcal{F}$ feletti függetlenségét használva, van olyan $j \in X \cap f(w)$, hogy $f_0(j) = i_0, ..., f_{n-1}(j) = i_{n-1}, g(j) = \alpha$. Ekkor $j \in f(w) = f(w_\alpha) = f(w_{g(j)})$ és $w \subseteq w = w_\alpha = w_{g(j)}$ miatt $j \in f'(w)$ is teljesül, ahogy állítottuk.

Ekkor az $U = \mathcal{F} \cup \{f'(\{i\}) : \ i \in \lambda\}$ halmazrendszer véges metszet tulajdonságú, mert f' additivitása miatt véges sok U-beli elem metszete $X \cap f'(w)$ alakú, ahol $X \in \mathcal{F}$ és $w \in [\lambda]^{<\omega}$. De az előző bekezdésben például azt is beláttuk, hogy $G - \{g\}$ minden eleme szürjektív ezen a metszeten, ezért e metszet nem lehet üres (itt használtuk, hogy $|G| \geq 2$: $G - \{g\}$ nem üres, ezért tényleg van olyan függvény, mely szürjektív az előbbi metszeten). Legyen $\mathcal{F}' = [U]$. Megint az előző bekezdés miatt ekkor $G - \{g\}$ független $\mathcal{F}'$ felett. ∎

2.53. Tétel. *Ha λ végtelen számosság, akkor van λ felett nem $\aleph_1$-teljes, jó ultraszűrő.*

Bizonyítás. Legyen az $s = \langle s_\kappa : \kappa < 2^\lambda \rangle$ sorozat olyan, hogy benne λ minden részhalmaza előfordul, továbbá minden monoton $f : [\lambda]^{<\omega} \to \mathcal{P}(\lambda)$ függvény 2^λ-szor fordul elő s-ben (és más nem fordul elő s-ben). A 2.50 lemmát $\mu = \aleph_0$-al alkalmazva van egy $\mathcal{F}_0$ nem $\aleph_1$-teljes szűrő és van egy 2^λ számosságú $G_0 \subseteq {}^\lambda\lambda$ függvényhalmaz, mely független (pontosabban $\aleph_0$-független) $\mathcal{F}$ felett. Tegyük fel, hogy $\kappa \leq 2^\lambda$ és minden $\mu < \kappa$-ra definiáltuk már az $\mathcal{F}_\mu$ szűrőket és a felettük független G_μ függvényhalmazokat úgy, hogy

- a szűrők $\mathcal{F}_\mu$ sorozata a tartalmazás szerint növő, a függvényhalmazok G_μ sorozata csökkenő,
- $\mathcal{F}_\mu$ megoldja az összes feladatot μ-ig, azaz minden $\nu < \mu$-re, ha $s_\nu \subseteq \lambda$, akkor vagy $s_\nu \in \mathcal{F}_\mu$, vagy $\lambda - s_\nu \in \mathcal{F}_\mu$ és ha $s_\nu : [\lambda]^{<\omega} \to \mathcal{F}_\nu$ monoton függvény, akkor van $\mathcal{F}_\mu$-be képező additív finomítása,
- $|G_0 - G_\mu| \leq |\mu| + \aleph_0$.

Ha κ limeszrendszám, akkor legyen $\mathcal{F}_\kappa = \cup_{\mu<\kappa}\mathcal{F}_\mu$ és legyen $G_\kappa = \cap_{\mu<\kappa}G_\mu$. Könnyen látható, hogy az indukciós feltételek érvényben maradnak.

Legyen most $\kappa = \mu + 1$ rákövetkező. Ha $s_\mu \subseteq \lambda$, akkor a 2.51 lemma szerint G_μ-ből el tudunk hagyni egy véges H halmazt úgy, hogy a maradék független

(a) $[\mathcal{F}_\mu \cup \{s_\mu\}]$ felett vagy (b) $[\mathcal{F}_\mu \cup \{\lambda - s_\mu\}]$ felett.

Legyen $G_\kappa = G_\mu - H$ és legyen $\mathcal{F}_\kappa$ (a) és (b) közül az a szűrő, mely felett G_κ független.

Ha s_μ egy $\mathcal{F}_\mu$-be képező monoton függvény, akkor legyen $g \in G_\mu$ tetszőleges ($|G_\mu| = 2^\lambda$ (és így nem üres) az utolsó indukciós feltétel miatt). A 2.52 lemma miatt $G_\kappa = G_\mu - \{g\}$ független $\mathcal{F}_\mu$ egy olyan $\mathcal{F}_\kappa$ bővítése felett, melyhez van s_μ-nek $\mathcal{F}_\kappa$-ba képező additív finomítása.

Ha s_μ egy olyan függvény, mely nem $\mathcal{F}_\mu$-be képez, akkor legyenek $\mathcal{F}_\kappa = \mathcal{F}_\mu$ és $G_\kappa = G_\mu$. Könnyű ellenőrizni, hogy ezen esetek mindegyikében érvényben maradnak az indukciós feltevések. Állítjuk, hogy $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{2^\lambda}$ a keresett ultraszűrő.

Mindegyik $\mathcal{F}_\mu$ egy szűrő, és s-ben λ minden részhalmaza előfordul, így a feladatok megoldása során minden ilyen részhalmazt vagy komplementumát bevettük valamelyik $\mathcal{F}_\mu$-be, ezért $\mathcal{F}$ ultraszűrő. Továbbá $\mathcal{F}_0$ nem $\aleph_1$-teljes, ezért a bővebb $\mathcal{F}$ sem $\aleph_1$-teljes. Végül legyen $f : [\lambda]^{<\omega} \to \mathcal{F}$ egy monoton függvény. Mivel $|dom(f)| = \lambda < cf(2^\lambda)$ ezért van olyan $\nu < 2^\lambda$, hogy $\mathcal{F}_\nu$ tartalmazza f értékkészletét. Továbbá f 2^λ-szor fordul elő s-ben, ezért van olyan $\mu > \nu$, hogy $s_\mu = f$; ezt a feladatot a $\mu + 1$. lépésben megoldottuk, vagyis van f-nek $\mathcal{F}_{\mu+1}$-be képező additív finomítása – e finomítás értékkészletét $\mathcal{F}$ is tartalmazza, vagyis $\mathcal{F}$ valóban jó. ∎

Ezek szerint tehát minden végtelen λ számossághoz vannak λ-n nem $\aleph_1$-teljes, jó ultraszűrők, és (λ-hoz képest) kicsi nyelvű struktúrák ilyen ultraszűrők szerinti ultraszorzatai a 2.48 tétel miatt λ^+-szaturáltak.

2.9. Keisler és Shelah Izomorfizmustételei

Többször is, például a 2.45 tétel után megjegyeztük, hogy bármely elemien ekvivalens struktúrapárnak vannak izomorf ultrahatványai, tehát az elemi ekvivalencia közvetlenül ultrahatványokkal is jellemezhető; a 2.34 tételben szereplő ultraláncok elhagyhatók. Ebben a fejezetben ezt a jellemzést igazoljuk majd. Először az általánosított kontinuum-hipotézis mellett igazoljuk, hogy elemien ekvivalens struktúráknak mindig vannak izomorf ultrahatványai, majd tisztán ZFC-ben is bebizonyítjuk ezt a tételt.

Szükségünk lesz a következő lemmára.

2.54. Lemma. *Ha A végtelen halmaz, $\mathcal{F}$ egy nem $\aleph_1$-teljes és jó ultraszűrő a végtelen λ számosság felett, akkor $|{}^{\lambda}A/\mathcal{F}| \geq 2^{\lambda}$.*

Bizonyítás. Mint elmítettük, az 5.1 alfejezetben megmutatjuk majd, hogy van egy olyan L véges nyelv és ezen egy konzisztens T elmélet, melyre igaz, hogy T minden végtelen $\mathcal{B}$ modelljében minden $X \in [B]^{\lambda}$-ra $|S_1^{\mathcal{B}}(X)| = 2^{\lambda}$. Legyen $\mathcal{A}$ ennek a T-nek egy olyan modellje, melynek A az alaphalmaza. Ekkor $\mathcal{C} = {}^{\lambda}\mathcal{A}/\mathcal{F}$ a 2.48 tétel miatt λ^+-szaturált. Ezért $|C| \geq \lambda$ (ellenkező esetben a λ-nál kevesebb elemet tartalmazó $\{x \neq c_a :\ a \in C\}$ formulahalmazt (mely a végtelen C-ben végesen realizálható) ki lehetne terjeszteni egy olyan C feletti típussá, mely $\mathcal{C}$-ben nem lenne realizálható). Van tehát egy $X \in [C]^{\lambda}$ halmaz. Ismét $\mathcal{C}$ λ^+-szaturáltsága miatt $S_1^{\mathcal{C}}(X)$ minden eleme realizálható $\mathcal{C}$-ben. De $\mathcal{C} \models T$ miatt ez 2^{λ} különböző típus realizációját jelenti, vagyis $|C| \geq 2^{\lambda}$, továbbá világos, hogy $|C| = |{}^{\lambda}A/\mathcal{F}|$, mert az ultraszorzat alaphalmazának számossága nem függ attól, hogy milyen relációk vannak még a struktúrákban. ∎

2.55. Tétel. *(Keisler Izomorfizmustétele). Tegyük fel az általánosított kontinuum-hipotézist. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.*

(1) Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ L-struktúrák elemien ekvivalensek.

(2) Ha $|A|, |B|, |Form(L)|, \aleph_0 \leq \lambda$ és $\mathcal{F}$ egy nem $\aleph_1$-teljes jó ultraszűrő λ felett, akkor $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ $\mathcal{F}$ szerinti ultrahatványai izomorfak.

Bizonyítás. Ha valamelyik struktúra véges, akkor az állítás semmitmondó. Feltesszük tehát, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ is végtelen.

(2) $\Rightarrow$ (1) megint könnyű: mivel a 2.53 tétel miatt λ-n van nem $\aleph_1$-teljes jó ultraszűrő, ezért (2) szerint $\mathcal{A}$-nak és $\mathcal{B}$-nek vannak izomorf ultrahatványai, ezekkel az ultrahatványaikkal $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ elemien ekvivalensek, ezért egymással is elemien ekvivalensek.

(1) $\Rightarrow$ (2)-höz először vegyük figyelembe, hogy a 2.48 tétel miatt $\mathcal{A}' = {}^{\lambda}\mathcal{A}/\mathcal{F}$ és $\mathcal{B}' = {}^{\lambda}\mathcal{B}/\mathcal{F}$ egyaránt λ^+-szaturáltak és persze (1) miatt elemien ekvivalensek is. Továbbá a 2.54 lemma miatt $2^{\lambda} \leq |A'|$ és nyilvánvaló, hogy $|A'| \leq |A|^{\lambda} \leq 2^{|A| \cdot \lambda} = 2^{\lambda}$.

Ezért $|A'| = 2^\lambda$ és hasonlóan $|B'| = 2^\lambda$. Az általánosított kontinuum-hipotézis miatt tehát $|A'| = |B'| = \lambda^+$, azaz $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$ szaturált és a korábbiak szerint elemien ekvivalens modellek, ezért a 2.44 tétel miatt izomorfak. ∎

Ezek szerint gch-ból következik, hogy

(1) két struktúra akkor és csak akkor elemien ekvivalens, ha vannak izomorf ultrahatványaik;

(2) sőt, elég nagy halmazokon vannak olyan ultraszűrők, hogy ha kicsi, de elemien ekvivalens struktúrák ultrahatványait ilyen ultraszűrők szerint vesszük, akkor izomorf struktúrákat kapunk.

Természetes kérdés, hogy ZFC-ben (tehát gch nélkül) mit tudunk mondani. Következő célunk Shelah bizonyítását ismertetni, mely szerint (1) ZFC-ben is érvényes. Megjegyezzük továbbá, hogy ZFC-nek van olyan modellje, melyben van két elemien ekvivalens megszámlálhatóan végtelen struktúra, melyekhez ω felett nincs olyan ultraszűrő ami szerint ultrahatványozva izomorf struktúrákat kapnánk (természetesen ω-nál nagyobb alaphalmaz felett van ilyen ultraszűrő). Tehát a kontinuum-hipotézis nélkül még a 2.45 tétel sem igaz, ezért (2)-höz hasonló állítás igazolása ZFC-ben nehéz probléma, mely jelenleg is nyitott.

Most rátérünk az (1) Izomorfizmustétel ZFC-beli, S. Shelah-tól származó bizonyítására. Ehhez használjuk majd az előző fejezet eredményeit és jelöléseit és a következő lemmákra is szükségünk lesz.

Ha $g, h \in {}^\lambda\beta$ akkor $||g = h|| = \{i \in \lambda : g(i) = h(i)\}$.

2.56. Lemma. *Legyenek β, λ, μ végtelen számosságok, $\beta < \mu$, μ reguláris. Legyen $[U] = \mathcal{F}$ szűrő λ felett (U végtelen), $G \subseteq {}^\lambda\beta$ úgy, hogy $G \perp_\mu \mathcal{F}$ és $|G| \geq |U| \cdot \mu$. Ekkor minden $h \in {}^\lambda\beta$-hoz van olyan $G' \subseteq G$, hogy $|G'| \leq |U| \cdot \mu$ és minden $g \in G - G'$-re*

$$G - G' - \{g\} \perp_\mu [\mathcal{F} \cup ||g = h||].$$

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathcal{F}$ tetszőleges és tegyük fel, hogy nincs olyan $G' \in [G]^{<\mu}$ melyre teljesülne, hogy

$(*)$ minden $g \in G - G'$-re, minden $\sigma < \mu$-re, minden páronként különböző függvényekből álló $\langle g_\gamma \in G - G' - \{g\} : \gamma < \sigma\rangle$ és minden $\langle v_\gamma \in \beta : \gamma < \sigma\rangle$ sorozatra van olyan $i \in A \cap ||g = h||$, hogy $(\forall\gamma < \sigma) f_\gamma(i) = v_\gamma$.

Transzfinit rekurzióval definiáljuk a következő objektumokat. Ha $\alpha < \beta$ és minden $\gamma < \alpha$-ra megadtuk már a páronként diszjunkt $K_\gamma \in [G]^{<\mu}$-t, $g_\gamma \in G - \cup_{\delta<\gamma} K_\delta$-t és $v_\gamma : K_\gamma \to \beta$-t, melyekre

$$(**) \qquad \{i \in \lambda : \ (\forall k \in K_\gamma) k(i) = v_\gamma(k)\} \cap A \cap ||g_\gamma = h|| = \emptyset,$$

akkor legyen $G' = \cup_{\gamma<\alpha} K_\gamma \cup \{g_\gamma : \gamma < \alpha\}$. Mivel $\alpha < \beta < \mu$, és μ reguláris, $|G'| < \mu$. A $(*)$ tagadására vonatkozó feltevést a G'-re alkalmazva kapjuk a $(**)$-ot kielégítő K_α-t g_α-t és v_α-t. A konstrukció miatt különböző α-ra a K_α-k diszjunktak. Legyen $L = \cup_{\gamma<\beta} K_\gamma \cup \{g_\gamma : \gamma < \beta\}$. Ekkor (ismét μ regularitása miatt) $|L| < \mu$ ezért, mivel $G \perp_\mu \mathcal{F}$, „az L-beli függvények értékét A-n tetszőlegesen előírhatjuk”, azaz van olyan $i \in A$, hogy

minden $\gamma < \beta$-ra $g_\gamma(i) = \gamma$ és
minden $\gamma < \beta$-ra és minden $k \in K_\gamma$-ra $k(i) = v_\gamma(k)$.

Ekkor a $\{g_\gamma : \gamma < \beta\}$ függvényhalmaz i-ben minden lehetséges értéket felvesz β-ból, ezért valamelyikük felveszi a $h(i) \in \beta$ értéket is. Ez azonban $(**)$ miatt lehetetlen. Ez az ellentmondás igazolja, hogy $(*)$ igaz (az előtte lévő tagadás nélkül).

Ezek szerint minden $A \in \mathcal{F}$-hez van egy $G'_A \in G$ melyre $(*)$ teljesül, legyen $G' = \cup_{A\in[U]^{<\omega}} G'_{\cap A}$. Világos, hogy ekkor $|G'| \leq |U| \cdot \mu$. Megmutatjuk, hogy minden $g \in G - G'$-re $G - G' - \{g\} \perp_\mu [\mathcal{F} \cup ||g = h||]$. Ehhez elég megmutatni, hogy ha $g \in G - G'$ tetszőleges, A az U véges sok elemének metszete, $\sigma < \mu$, $f = \langle f_\gamma \in G - G' - \{g\} : \gamma < \sigma\rangle$ páronként különböző függvények és $v = \langle v_\gamma \in \beta\rangle$ akkor van olyan $i \in A \cap ||g = h||$, hogy $(\forall\gamma < \sigma) f_\gamma(i) = v_\gamma$. Mivel $G - G'$ nem üres, ebből az is következik, hogy $\mathcal{F} \cup ||g = h||$ véges metszet tulajdonságú, ezért valóban jogos a generált szűrőről beszélni.

Legyenek tehát adottak az előző bekezdésben felsorolt g, A, σ, f és v. Ekkor $G - G' \subseteq G - G'_A$, ezért $(*)$ alkalmazható, és épp a bizonyítandó állítást adja. ∎

2.57. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $[U] = \mathcal{F}$ *szűrő* λ *felett, és* $G \subseteq {}^\lambda\beta$ *úgy, hogy* $G \perp_\mu \mathcal{F}$, $\beta < \mu$ *végtelen számosságok,* μ *reguláris. Legyen* $s = \langle s_\gamma \subseteq \lambda : \gamma < \varrho\rangle$.

(1) Ekkor van olyan $G' \subseteq G$, *hogy* $|G'| \leq \varrho \cdot \mu$ *és* $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ *úgy, hogy* $G - G' \perp_\mu \mathcal{F}'$ *és minden* $\gamma < \varrho$-*ra vagy* $s_\gamma \in \mathcal{F}'$ *vagy* $\lambda - s_\gamma \in \mathcal{F}'$.

(2) Ha $H \subseteq {}^\lambda\beta$, $|H| = \varrho$ *és* $|G| > |U| \cdot \mu \cdot \varrho$ *akkor van olyan* $G' \subseteq G$, *hogy* $|G'| \leq |U| \cdot \mu \cdot \varrho$ *és minden* $g \in G - G'$-*re és* $h \in H$-*ra*

$$G - G' - \{g\} \perp_\mu [\mathcal{F} \cup ||g = h||].$$

Bizonyítás. (1)-hez a 2.51 lemmát fogjuk „ϱ”-szor alkalmazni. Transzfinit rekurzióval definiáljuk szűrők egy $\langle \mathcal{F}_\gamma : \gamma < \varrho\rangle$ növő sorozatát és függvényhalmazok egy $\langle G'_\gamma : \gamma < \varrho\rangle$ egy sorozatát úgy, hogy

(a) $G - \cup_{\delta<\gamma} G'_\delta \perp_\mu \mathcal{F}_\gamma$,
(b) $|G_\gamma| \leq \mu$ és
(c) minden $\delta < \gamma$-ra vagy $s_\delta \in \mathcal{F}_\gamma$ vagy $\lambda - s_\delta \in \mathcal{F}_\gamma$.

Legyen $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, és $G'_0 = \emptyset$ és legyen $\alpha \leq \varrho$. Ha minden $\gamma < \alpha$-ra definiáltuk már $\mathcal{F}_\gamma$-t és G'_γ-t, akkor alkalmazzuk a 2.51 lemmát az $\cup_{\gamma<\alpha}\mathcal{F}_\gamma$ szűrőre, a $G - \cup_{\gamma<\alpha}G'_\gamma$ függvényhalmazra és s_α-ra, az eredmény legyen $\mathcal{F}_\alpha$ és G'_α. Könnyű ellenőrizni, hogy (a)-(c) érvényben marad.

Legyen $\mathcal{F}' = \cup_{\gamma<\varrho}\mathcal{F}_\gamma$ és legyen $G' = \cup_{\gamma<\varrho}G'_\gamma$. Ekkor Minden $\gamma < \varrho$-ra vagy $s_\gamma \in \mathcal{F}'$ vagy $\lambda - s_\gamma \in \mathcal{F}'$ és $|G'| \leq \varrho \cdot \mu$. Végül $G - G' \perp_\mu \mathcal{F}'$, mert ha $A \in \mathcal{F}'$, akkor van olyan $\gamma < \varrho$ hogy $A \in \mathcal{F}_\gamma$. Ha most $\alpha < \mu$, $\langle f_\gamma \in G - G' : \gamma < \alpha\rangle$ és $\langle v_\gamma \in \beta : \gamma < \alpha\rangle$ akkor $G - G' \subseteq G - \cup_{\delta<\gamma}G'_\delta$ és (a) miatt van olyan $i \in A$, hogy minden $\gamma < \alpha$-ra $f_\gamma(i) = v_\gamma$, tehát valóban $G - G' \perp_\mu \mathcal{F}'$.

(2) bizonyítása egyszerűbb: a 2.56 lemma miatt minden $h \in H$-hoz van egy $G'_h \subseteq G$, hogy $|G'_h| \leq |U| \cdot \mu$ és minden $g \in G - G'_h$-re

$$(*) \qquad G - G'_h - \{g\} \perp_\mu [\mathcal{F} \cup ||g = h||].$$

Legyen $G' = \cup\{G_h : h \in H\}$. Ekkor $|G'| \leq |U| \cdot \mu \cdot \varrho$. Ha most $h \in H$ és $g \in G - G'$, akkor $g \in G - G'_h$, ezért $(*)$-ból következik az állítás. ∎

Most már rátérhetünk Shelah Izomorfizmustételének bizonyítására. Mint láttuk, ha *gch*-t feltesszük, akkor a jó ultraszűrők szerinti ultrahatványok szaturáltak lesznek, ezért transzfinit rekurzióval megadható köztük egy izomorfizmus. Ehhez egyébként a szaturáltság helyett elég annyit garantálni, hogy a transzfinit rekurzióban soronkövetkező elem típusa realizálható legyen a másik struktúrában. Ugyanakkor *gch* nélkül az ultrahatványok túl nagyok lehetnek. A kulcs ötlet az, hogy a jó ultraszűrők konstrukciója közben használt transzfinit rekurziót és az izomorfizmus felépítésére használt transzfinit rekurziót vonjuk össze, és csináljuk egyszerre.

Ehhez megint független függvényhalmazokat fogunk használni; de míg *gch* mellet a független függvényeket az indexhalmaz partícionálására használtuk, a következő bizonyításban az ultrahatványok elemei lesznek.

2.58. Tétel. *(Shelah Izomorfizmustétele.) A következő állítások ekvivalensek.*

(1) Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ L-struktúrák elemien ekvivalensek.

(2) $\mathcal{A}$-nak és $\mathcal{B}$-nek vannak izomorf ultrahatványaik.

Bizonyítás. Megint, ha valamelyik struktúra véges, akkor az állítás semmitmondó. Feltesszük tehát, hogy mindkét struktúra végtelen. (2) $\Rightarrow$ (1) ugyanúgy igazolható, mint a 2.55 tételben (ebben az irányban nem használtuk *gch*-t).

Lássuk (1) $\Rightarrow$ (2) bizonyítását. Legyen β olyan számosság, hogy $|Form(L)|$,$|A|$,$|B| \leq \beta$, legyen $\mu > \beta$ reguláris (például $\mu = \beta^+$) és legyen $\lambda = 2^\mu$. Célunk, hogy λ felett megadjunk egy olyan $\mathcal{F}$ ultraszűrőt, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ $\mathcal{F}$ szerinti ultrahatványai izomorfak legyenek.

Figyeljük meg, hogy $2^\lambda \leq |{}^\lambda A| \leq \beta^\lambda = \beta^{2^\mu} \leq 2^{\beta \cdot 2^\mu} = 2^{2^\mu} = 2^\lambda$ és hasonlóan $|{}^\lambda B| = 2^\lambda$. Rögzítsük az $A = \{c_\gamma : \gamma < |A|\}$, $B = \{d_\gamma : \gamma < |B|\}$ felsorolásokat.

Legyen továbbá $s = \langle s_\gamma : \gamma < 2^\lambda \rangle$ egy olyan sorozat, melyben előfordul ${}^\lambda A$ és ${}^\lambda B$ minden eleme és λ minden részhalmaza (és más nem fordul elő). Transzfinit rekurzióval minden $\gamma < 2^\lambda$-ra meg fogunk adni egy $G_\gamma \subseteq {}^\lambda\beta$-t és $U_\gamma \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$-t, és bizonyos $\gamma < 2^\lambda$-kra egy-egy $a_\gamma \in {}^\lambda|A|$-t és $b_\gamma \in {}^\lambda B$-t úgy, hogy a következők teljesüljenek minden $\delta < \gamma \leq 2^\lambda$-ra :

(a) $G_\delta \supseteq G_\gamma$, $|G_\gamma| = 2^\lambda$, $|G_0 - G_\gamma| \leq |\gamma| + \lambda$,
(b) $U_\delta \subseteq U_\gamma$, $|U_\gamma| \leq |\gamma| + \lambda$, U_γ véges metszet tulajdonságú,
(c) $G_\gamma \perp_\mu [U_\gamma]$,
(d) Ha $s_\delta \subseteq \lambda$ akkor vagy $s_\delta \in [U_\gamma]$ vagy $\lambda - s_\delta \in [U_\gamma]$,
(e) Ha $s_\delta \in {}^\lambda A$ akkor $s_\delta \in \{a_\xi : \xi < \gamma\}$, ha $s_\delta \in {}^\lambda B$ akkor $s_\delta \in \{b_\xi : \xi < \gamma\}$,
(f) a_δ és b_δ egyszerre definiált vagy nem definiált,
(g) Ha φ egy n-változós L-formula és $\tau_0, ..., \tau_{n-1} < \gamma$, melyekre mindegyik a_{τ_i} definiált, akkor
vagy $\{i \in \lambda : \mathcal{A} \models \varphi(a_{\tau_0}(i), ..., a_{\tau_{n-1}}(i))\} \in [U_\gamma]$
vagy $\{i \in \lambda : \mathcal{A} \not\models \varphi(a_{\tau_0}(i), ..., a_{\tau_{n-1}}(i))\} \in [U_\gamma]$,
(h) Ha φ egy n-változós L-formula és $\tau_0, ..., \tau_{n-1} < \gamma$ melyekre mindegyik a_{τ_i} és b_{τ_i} definiált, akkor
$\{i \in \lambda : \mathcal{A} \models \varphi(a_{\tau_0}(i), ..., a_{\tau_{n-1}}(i))\} \in [U_\gamma] \Leftrightarrow$
$\{i \in \lambda : \mathcal{B} \models \varphi(b_{\tau_0}(i), ..., b_{\tau_{n-1}}(i))\} \in [U_\gamma]$.

Legyen $U_0 = \{\lambda\}$, ekkor a 2.50 lemma miatt van olyan $G_0 \subseteq {}^\lambda\beta$, hogy $|G_0| = 2^\lambda$ és $G_0 \perp_\mu [U_0]$. Ezekre (a)-(h) nyilván fennáll ((g) és (h) azért, mert ha szabad változó nélküli formulákat veszünk, akkor a kérdéses λ-beli indexhalmazok vagy üresek, vagy λ-val egyenlők és $\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B}$ miatt ezek egyszerre következnek be). Tegyük most fel, hogy $\kappa \leq 2^\lambda$ és definiáltuk már a_γ-t, b_γ-t, G_γ-t és U_γ-t úgy, hogy minden $\gamma < \kappa$-ra (a)-(h) teljesül.

Ha κ limeszrendszám, akkor legyen $G_\kappa = \cap_{\gamma<\kappa} G_\gamma$ és legyen $U_\kappa = \cup_{\gamma<\kappa} U_\gamma$. Ezekre megint könnyű meggondolni, hogy (a)-(h) érvényben marad. Legyen κ rákövetkező, mondjuk $\kappa = \gamma + 1$.

Ha $s_\gamma \subseteq \lambda$, akkor a 2.51 lemmát alklamazva G_γ-ra és $[U_\gamma]$-ra találunk egy olyan $G' \subseteq G_\gamma$-t, hogy $|G'| < \mu$ és G'-t G_γ-ból elhagyva a maradék μ-független lesz $[U_\gamma \cup \{s_\gamma\}]$ vagy $[U_\gamma \cup \{\lambda - s_\gamma]$ felett. Ennek megfelelően legyen $G_\kappa = G_\gamma - G'$ és U_κ $U_\gamma \cup \{s_\gamma\}$ vagy $U_\gamma \cup \{\lambda - s_\gamma\}$, aszerint, hogy G_κ melyikük felett μ-független. Megint könnyű meggondolni, hogy (a)-(h) érvényben marad.

Hátra van még az az eset, hogy $s_\gamma \in {}^\lambda A$ vagy $s_\gamma \in {}^\lambda B$. E két eset teljesen szimmetrikus, hiszen az összes indukciós feltevés megfogalmazása (g) kivételével szimmetrikus a_γ-ra és b_γ-ra, de (g) duálisa is egyszerűen következik (g)-ből és (h)-ból. Tehát csak az $s_\gamma \in {}^\lambda A$ esettel fogunk foglalkozni. Ha $s_\gamma \in \{a_\xi : \xi \leq \gamma\}$, akkor nincs teendőnk: a $G_\kappa = G_\gamma, U_\kappa = U_\gamma$ választással (a)-(h) nyilvánvalóan érvényben marad. Tegyük tehát fel, hogy $s_\gamma \in {}^\lambda A - \{a_\xi : \xi \leq \gamma\}$.

Legyen minden n-változós $\varphi \in Form(L)$ formulára és $\bar{\tau} \in \{a_\xi : \xi \leq \gamma\}$-ra

$$A_{\varphi,\bar{\tau}} = \{i \in \lambda : \mathcal{A} \models \varphi(s_\gamma(i), \bar{\tau}(i))\}.$$

Mivel $|Form(L_{\{a_\xi:\xi\leq\gamma\}})| \leq \lambda + |\gamma|$, itt összesen legfeljebb $\varrho = \lambda + |\gamma|$ darab halmazról van szó (azaz feltehető, hogy $\langle z_\nu : \nu < \varrho\rangle$ az összes $A_{\varphi,\bar{\tau}}$ alakú halmazok egy felsorolása). A 2.57 lemma miatt ekkor van olyan $G' \subseteq G_\gamma$, hogy $|G'| \leq \varrho \cdot \mu$ és van olyan $\mathcal{F}' \supseteq [U_\gamma]$ hogy $G_\gamma - G' \perp_\mu \mathcal{F}'$ és minden $\nu < \varrho$-ra vagy $z_\nu \in \mathcal{F}'$ vagy $\lambda - z_\nu \in \mathcal{F}'$. Továbbá feltehetjük, hogy $\mathcal{F}'$-t az $U' = U_\gamma \cup \{z_\nu : z_\nu \in \mathcal{F}'\} \cup \{\lambda - z_\nu : z_\nu \notin \mathcal{F}\}$ halmazrendszer generálja; ekkor $|U'| \leq |U_\gamma| + \varrho = \lambda + |\gamma|$ (itt (b)-t is használtuk). $\mathcal{F}_\kappa$-t majd úgy fogjuk választani, hogy tartalmazza $\mathcal{F}'$-t; ezzel elérjük, hogy (g) érvényben maradjon.

Legyen minden n-változós $\varphi \in Form(L)$ formulára és $\bar{\tau} \in \{b_\xi : \xi \leq \gamma\}$-ra $h_{\varphi,\bar{\tau}} : \lambda \to \beta$ a következő függvény:

$h_{\varphi,\bar{\tau}}(i) = \sigma$, ha σ a legkisebb olyan rendszám, melyre $\mathcal{B} \models \varphi(d_\sigma, \bar{\tau}(i))$, ha van ilyen σ, különben legyen $h_{\varphi,\bar{\tau}}(i) = 0$.

Megint, így legfeljebb $\varrho = \lambda + |\gamma|$ darab függvényt adtunk meg. Alkalmazzuk a 2.57 lemmát $G_\gamma - G'$-re, $\mathcal{F}'$-re és az összes $h_{\varphi,\bar{\tau}}$-ból álló H-ra (ezt megtehetjük, mert (a) miatt $|G_\gamma - G'| = |2^\lambda - \varrho \cdot \mu| = 2^\lambda > |U'| \cdot \varrho \cdot \mu$, hisz ez utóbbi számosság legfeljebb $\lambda + |\gamma|$). Ezek szerint tehát van olyan $G'' \subseteq G_\gamma - G'$, hogy $|G''| \leq \lambda + |\gamma|$ és minden $g \in G_\gamma - G' - G''$-re és $h \in H$-ra

$$(*) \qquad G_\gamma - G' - G'' - \{g\} \perp_\mu [\mathcal{F}' \cup ||g = h||].$$

A fenti becslések szerint $|G' \cup G''| \leq \lambda + \gamma$, ezért van egy $g \in G_\gamma - G' - G''$ függvény. Legyen most minden $i \in \lambda$-ra $t(i) = d_{g(i)}$ és minden $\varphi \in L$ formulára és $\bar{\tau} \in \{b_\xi : \xi \leq \gamma\}$-ra legyen

$$B_{\varphi,\bar{\tau}} = \{i \in \lambda : \ \mathcal{B} \models \varphi(t(i), \bar{\tau}(i))\}.$$

A konstrukció befejezéseképpen belátjuk, hogy (a)-(h) κ-ra is érvényben marad a $G_\kappa = G_\gamma - G' - G'' - \{g\}$, $U_\kappa = U' \cup \{B_{\varphi,\bar{\tau}} : \ A_{\varphi,\bar{\tau}} \in [U']\}$, $a_\kappa = s_\gamma$ és $b_\kappa = t$ választással.

A korábbi becslések miatt $|G'| = |G''| = \lambda + |\gamma|$, ezért (a) fennáll és (b)-ből is világos az utolsó rész kivételével minden. U_κ véges metszet tulajdonságát és (c)-t egyszerre látjuk be. Legyen tehát $\alpha < \mu$ és $\langle k_\delta \in G_\kappa : \delta < \alpha\rangle$ páronként különböző függvények egy sorozata, legyen $\langle v_\delta \in \beta : \delta < \alpha\rangle$ és legyen $X \subseteq \lambda$ olyan, mely U_κ véges sok elemének metszeteként áll elő, mondjuk $X = Y_0 \cap ... \cap Y_{n-1} \cap B_{\varphi_0,\bar{\tau}_0} \cap ... \cap B_{\varphi_{m-1},\bar{\tau}_{m-1}}$, ahol az első n halmaz U'-beli, és $A_{\varphi_0,\bar{\tau}_0}, ... A_{\varphi_{m-1},\bar{\tau}_{m-1}} \in [U']$. Elég megmutatni, hogy van olyan $i \in X$, melyre $(\forall\delta < \alpha) k_\delta(i) = v_\delta$; ebből következik, hogy U_κ véges metszet tulajdonságú és $G_\kappa \perp_\mu [U_\kappa]$.

Tehát minden $j < m$-re $A_{\varphi_j,\bar{\tau}} \in [U']$. Figyeljuk meg, hogy $\phi = \wedge_{i<m}\varphi$-re és $\bar{\tau} = \bar{\tau}_0...\bar{\tau}_{m-1}$-re $A_{\phi,\bar{\tau}} = A_{\varphi_0,\bar{\tau}_0} \cap ... \cap A_{\varphi_{m-1},\bar{\tau}_{m-1}}$ és $A_{\phi,\bar{\tau}} \in [U']$. Ezért az ennél bővebb $A_{\exists v_0\phi,\bar{\tau}} = \{i \in \lambda : \mathcal{A} \models (\exists v_0)\phi(v_0, \bar{a}_\tau(i))\}$ halmaznak (b) és (g) γ-ra vonatkozó példánya miatt $[U_\gamma]$-ban kell lennie, ezért (h) γ-ra vonatkozó példánya szerint $B_{\exists v_0\phi,\bar{\tau}} = \{i \in \lambda : \mathcal{B} \models (\exists v_0)\phi(v_0, \bar{b}_\tau(i))\} \in [U_\gamma]$. Ezért $(*)$ miatt van olyan $i \in Y_0 \cap ... \cap Y_{n-1} \cap ||g = h_{(\exists v_0)\phi,\bar{\tau}}||$ úgy, hogy minden $\delta < \alpha$-ra $k_\delta(i) = v_\delta$. Ezek szerint $g(i)$ egy olyan elem, melyre $\mathcal{B} \models \phi(g(i), \bar{b}_\tau(i))$, vagyis $i \in B_{\phi,\bar{\tau}} = \cap_{j<m} B_{\varphi_j,\bar{\tau}_j}$ tehát $i \in X$, ahogy állítottuk.

(d),(e) és (f) κ-ra nyilvánvalóan igaz marad. (g) azért marad igaz, mert $\mathcal{F}'$-t úgy választottuk, hogy tartalmazza a megfelelő halmazokat, és $\mathcal{F}' \subseteq [U_\kappa]$. Végül (h) is igaz marad κ-ra, mert U_κ konstrukciója miatt a (h)-beli implikáció balról jobbra fennáll. Fordítva, ha $A_{\varphi,\bar{\tau}} \notin [U_\kappa]$, akkor (g) miatt $\lambda - A_{\varphi,\bar{\tau}} = A_{\neg\varphi,\bar{\tau}} \in [U_\kappa]$ ezért U_κ definíciója miatt $B_{\neg\varphi,\bar{\tau}} \in [U_\kappa]$, vagyis $\lambda - B_{\varphi,\bar{\tau}} \in [U_\kappa]$. De azt már igazoltuk, hogy U_κ véges metszet tulajdonságú, ezért $B_{\varphi,\bar{\tau}} \notin [U_\kappa]$.

Ezzel a transzfinit konstrukciót befejeztük, most a konstruált objektumok segítségével megadjuk az izomorfizmust. Legyen $\mathcal{F} = [U_{2^\lambda}]$. Ez (b) miatt szűrő és (d) miatt ultraszűrő. Ha $\xi < \eta < 2^\lambda$ és $a_\xi/\mathcal{F} = a_\eta/\mathcal{F}$ akkor (g) miatt $\{i \in \lambda : a_\xi(i) = a_\eta(i)\} \in [U_{\eta+1}]$ ezért (h) $\eta + 1$-edik példányát a $v_0 = v_1$ formulára és a $\bar{\tau} = \langle a_\xi, a_\eta \rangle$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy $b_\xi/\mathcal{F} = b_\eta/\mathcal{F}$. Emaitt és (f) miatt az $f(a_\xi/\mathcal{F}) = b_\xi/\mathcal{F}$ megfeleltetés jóldefiniált (vagyis f eredménye nem függ az argumentumában szereplő ekvivalenciaosztály reprezentánsától). Továbbá (e) miatt f az egész ${}^\lambda A/\mathcal{F}$-en értelmezve van és szürjektív. Hasonlóan, ha $\xi < \eta$ és $a_\xi/\mathcal{F} \neq a_\eta/\mathcal{F}$ akkor (g) $\eta + 1$. példányát a $\varphi = v_0 \neq v_1$ formulára és $\bar{\tau} = \langle a_\xi, a_\eta \rangle$-re alkalmazva kapjuk, hogy $A_{\varphi,\bar{\tau}} \in [U_{\eta+1}]$ ezért (h) miatt $B_{\varphi,\bar{\tau}} \in [U_{\eta+1}]$ azaz $f(a_\xi/\mathcal{F}) = b_\xi/\mathcal{F} \neq b_\eta/\mathcal{F} = f(a_\eta/\mathcal{F})$, vagyis f injektív függvény. Végül (h)-t az atomi formulákra alkalmazva adódik, hogy $f : {}^\lambda\mathcal{A}/\mathcal{F} \to {}^\lambda\mathcal{B}/\mathcal{F}$ izomorfizmus. ∎

A 2.30 tétel szerint egy végtelen struktúra alkalmas ultrahatványai elemien ekvivalens, de nem izomorf struktúrákat állítanak elő; ez volt az oka, hogy a végtelen struktúrák izomorfizmus erejéig elsőrendben leírhatatlanok. Ugyanakkor Shelah izomorfizmustétele szerint elemien ekvivalens struktúráknak vannak izomorf ultrahatványaik, vagyis az elemien ekvivalens struktúrák „ultrahatványozás erejéig" izomorfak. Ezért „amit az ultraszorzat elront" a leírhatatlansággal kapcsolatban, azt „ki is javítja ".

3. Következmények, alkalmazások

Az alkalmazások ismertetését Shelah izomorfizmustétele néhány következményének bemutatásával kezdjük. Először az axiomatizálható modellosztályok további jellemzéseit adjuk. Majd a definiálhatóság elméletéből ismertetünk eredményeket. Többek között igazoljuk majd Svenonius tételét: egy extra reláció akkor és csak akkor definiálható elsőrendben explicit módon, ha az elmélet egyetlen modelljének sem csökkenti az automorfizmuscsoportját. Ebből levezetjük majd Beth tételét is: az implicite definiálható relációk explicite is definiálhatók. Végül a nemsztenderd analízis alapjaiból adunk ízelítőt.

3.1. Axiomatizálhatóság

A 2.25 tételben szükséges és elégséges feltételt adtunk arra vonatkozóan, hogy egy struktúraosztály axiomatizálható legyen elsőrendű formulák egy alkalmas halmazával. Az axiomatizálhatóság egy a formulák világában megfogalmazott (szintaktikus) tulajdonság; célunk az volt, hogy e tulajdonságot modellelméleti konstrukciókkal írjuk le, vagyis olyan ekvivalens állításokat találjunk, melyek az axiomatizálás lehetőségét vagy lehetetlenségét a modellek szerkezetének, egymáshoz viszonyított kapcsolatának segítségével tisztázzák. Ezt a célt csak részben értük el a 2.25 tételben, mert ott az elemi ekvivalenciára is hivatkoznunk kellett. Az elemi ekvivalencia viszont szintaktikus természetű, hiszen definíciójában formulákról is szó van. Most lehetőségünk van megadni az axiomatizálhatóság egy tisztán modellelméleti jellemzését.

3.1. Definíció. *A K struktúraosztály zárt az ultragyökvonásra, ha minden $\mathcal{A}$ struktúrára teljesül, hogy ha $\mathcal{A}$ valamely ultrahatványa izomorf egy K-beli struktúrával, akkor $\mathcal{A} \in K$ is fennáll.*

3.2. Tétel.

(1) A K struktúraosztály akkor és csak akkor axiomatizálható elsőrendű formulákkal, ha K zárt ultraszorzatra és ultragyökvonásra.

(2) K akkor és csak akkor axiomatizálható végesen, ha K zárt ultraszorzatra, ultragyökvonásra és K komplementuma zárt ultraszorzatra.

Bizonyítás. A 2.25 tétel miatt elég megmutatni, hogy a következő két állítás ekvivalens.

(a) K zárt ultraszorzatra és elemi ekvivalenciára.
(b) K zárt ultraszorzatra és ultragyökvonásra.

Az (a) $\Rightarrow$ (b) következtetés helyes, mert a Łoś-lemma miatt minden struktúra elemien ekvivalens minden ultrahatványával.

Fordítva, tegyük fel (b)-t; megmutatjuk, hogy ekkor K az elemi ekvivalenciára is zárt. Legyen $\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B}$ és tegyük föl, hogy $\mathcal{A} \in K$. Shelah Izomorfizmustétele (2.58 tétel) miatt $\mathcal{A}$-nak és $\mathcal{B}$-nek vannak izomorf ultrahatványai (legyenek ezek rendre $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$). Mivel K ultraszorzatra zárt, $\mathcal{A}' \in K$. Tehát $\mathcal{B}$ egy ultrahatványa izomorf egy K-beli struktúrával, ezért K ultragyökvonásra való zártsága miatt $\mathcal{B} \in K$, ahogy állítottuk. ∎

3.2. Definiálhatóság

Most a definiálhatóság elméletéből mutatunk be egyszerűbb tételeket.

3.3. Definíció. *Legyen $L \subseteq L'$ két elsőrendű nyelv, legyen T egy elmélet a bővebb L' nyelven, és legyen R olyan (mondjuk n-változós) relációszimbólum, mely nem szerepel L-ben.*

(1) Azt mondjuk, hogy T-ben R explicit módon definiálható L felett, ha van olyan $\varphi(v_0, ..., v_{n-1})$ formula a kisebb L nyelven, hogy T minden $\mathcal{A}$ modelljében teljesül, hogy

$$||\varphi||^{\mathcal{A}} = \{\bar{a} \in {}^nA : \ \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]\} = R^{\mathcal{A}}.$$

(2) Azt mondjuk, hogy T implicit módon definiálja R-t L felett, ha T bármely két $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ modelljére teljesül, hogy ha L-reduktumuk azonos, akkor L_R-reduktumuk is azonos.

Az előbbi definíció (2) pontjában az „L-reduktumuk azonos" azt jelenti, hogy a két struktúra univerzuma ugyanaz a halmaz, és a relációszimbólumok és függvényszimbólumok interpretációi is azonosak (mint halmazok). Ez erősebb megkötés, mintha csak azt feltételeznénk, hogy „L-reduktumuk izomorf". Egy pillanatig T modelljeit képzeljük el úgy, hogy előbb L-reduktumaikat építjük fel, majd ezt terjesztjük ki megfelelő módon az L'-beli szimbólumok interpretációjával. Ekkor „T implicit módon definiálja R-t L felett" azt jelenti, hogy T modelljeinek L-reduktumain pontosan 1 féleképpen interpretálhatjuk R-t, hogy végül tényleg T egy modelljét kapjuk. Egy L' nyelvű struktúra L reduktumát $\mathcal{A}|_L$-el fogjuk jelölni.

Világos, hogy minden T-ben L felett explicit módon definiálható reláció implicit módon is definiálható. Célunk bebizonyítani (azt a Beth-től származó tételt), hogy ennek megfordítása is igaz.

3.4. Tétel. *(Svenonius Definiálhatósági Tétele).*
Legyen T egy teljes elmélet az L' nyelven. Az előbbi jelöléseket megtartva, a következő állítások ekvivalensek.

(a) T-ben R explicit módon definiálható L felett.
(b) Ha $\mathcal{A} \models T$ és f az $\mathcal{A}|_L$ egy automorfizmusa, akkor f megtartja $R^{\mathcal{A}}$-t is.

Bizonyítás. Először tegyük fel (a)-t, legyen $\mathcal{A} \models T$ és f legyen $\mathcal{A}|_L$ egy automorfizmusa. Ekkor (a) miatt van egy olyan φ, melyre $||\varphi||^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}}$, ezért elég megmutatni, hogy f megtart minden L-formulát. Ez viszont egyszerűen adódik az 1.9 tétel (1) pontjából.

Fordítva, tegyük most fel (b)-t, és indirekt módon tegyük fel, hogy (a) nem igaz, azaz R nem definiálható expliciten T-ben L felett. Legyen $\bar{c}$ és $\bar{d}$ csupa új konstansszimbólum, melyek olyan hosszúak, ahány változós R. Tekintsük a

$$\Sigma = T \cup \{\phi(\bar{c}) \Leftrightarrow \phi(\bar{d}) : \ \phi \in Form(L)\} \cup \{R(\bar{c}), \neg R(\bar{d})\}$$

formulahalmazt. Megmutatjuk, hogy ez a Σ konzisztens. Ha nem így volna, akkor a kompaktsági tétel miatt lenne véges sok $\phi_0, ..., \phi_{m-1}$ L-formula, hogy $T \cup \wedge_{i<m}\{\phi_i(\bar{c}) \Leftrightarrow \phi_i(\bar{d}\} \cup \{R(\bar{c}), \neg R(\bar{d})\}$-nek se lenne modellje, vagyis, hogy

$$(*) \qquad T \models \forall \bar{x}\bar{y}(\wedge_{i<m}(\phi_i(\bar{x}) \Leftrightarrow \phi_i(\bar{y})) \Rightarrow (R(\bar{x}) \Rightarrow R(\bar{y})))$$

következne. Ebben az esetben azonban R explicit módon definiálható lenne a következők miatt. Legyen minden $\mathcal{A} \models T$-re és $\bar{a} \in A$-ra $\Phi_{\bar{a}} = \wedge\{\phi_i(\bar{x}) : \ i < m, \mathcal{A} \models \phi_i[\bar{a}]\} \wedge \wedge\{\neg\phi_i(\bar{x}) : \ i < m, \mathcal{A} \models \neg\phi_i[\bar{a}]\}$. Világos, hogy logikai ekvivalencia erejéig így véges sok $\Phi_{\bar{a}}$ alakú formulát kaptunk. Legyen Φ az összes olyan $\Phi_{\bar{a}}$ alakú formulák diszjunkciója, melyekre igaz, hogy T valamely modelljében van egy $\bar{a} \in A$, hogy $R^{\mathcal{A}}(\bar{a})$ fennáll. Állítjuk, hogy ez a Φ definiálja R-t. Ehhez legyen $\mathcal{A} \models T$. Ha $\bar{a} \in R^{\mathcal{A}}$, akkor a konstrukció miatt $\mathcal{A} \models \Phi^{\mathcal{A}}[\bar{a}]$, ezért $\mathcal{A} \models R \Rightarrow \Phi$. Fordítva, ha $\mathcal{A} \models \Phi^{\mathcal{A}}[\bar{a}]$, akkor van olyan $\mathcal{B} \models T$ és $\bar{b} \in B$, hogy $\Phi_{\bar{a}} = \Phi_{\bar{b}}$ és $\mathcal{B} \models R[\bar{b}]$. Mivel $\mathcal{B} \models \Phi_{\bar{b}}[\bar{b}]$, ezért $\mathcal{B} \models \exists\bar{x}(\Phi_{\bar{b}}(\bar{x}) \wedge R(\bar{x}))$. T azonban teljes elmélet, ezért ugyanezt a formulát $\mathcal{A}$ is kielégíti, és ezért $\Phi_{\bar{a}} = \Phi_{\bar{b}}$ miatt van olyan $\bar{c} \in R^{\mathcal{A}}$, hogy $\Phi_{\bar{a}} = \Phi_{\bar{b}} = \Phi_{\bar{c}}$. Viszont ekkor $(*)$ miatt $\bar{a} \in R^{\mathcal{A}}$, vagyis $\mathcal{A} \models \Phi \Rightarrow R$. Mivel $\mathcal{A}$ tetszőleges volt, ezzel beláttuk, hogy R explicit módon definiálható T-ben L felett; ez ellentmond az indirekt feltevésünknek. Tehát Σ konzisztens.

Legyen most $\langle \mathcal{A}, \bar{a}, \bar{b}\rangle \models \Sigma$. Ekkor Σ választása miatt $\mathcal{A}' = \langle \mathcal{A}|_L, \bar{a}\rangle$ és $\mathcal{A}'' = \langle \mathcal{A}|_L, \bar{b}\rangle$ elemien ekvivalensek. Shelah Izomorfizmustétele (a 2.58 tétel) miatt $\mathcal{A}'$-nek és $\mathcal{A}''$-nek vannak izomorf ultrahatványaik; legyen f egy izomorfizmus. Mivel $\mathcal{A}'|_L = \mathcal{A}|_L = \mathcal{A}''|_L$, ezért ez az f izomorfizmus az $\mathcal{A}|_L$ struktúra automorfizmusa, melyre $f(\bar{a}) = \bar{b}$, ugyanakkor az ultrahatvány(ok) Σ modellje(i), ezért az ultrahatványban $R(\bar{a})$ teljesül, de $R(\bar{b})$ nem. Ez azonban ellentmond (b)-nek, mely szerint automorfizmusunknak meg kéne tartani R-t. ∎

3.5. Tétel. *(Szeparációs tétel.) Ha K és M diszjunkt, L-struktúrákból álló osztályok, melyek ultraszorzatra zártak, akkor vannak olyan diszjunkt $K \subseteq K'$ és $M \subseteq M'$ osztályok, melyek végesen axiomatizálhatók. Speciálisan, van olyan $\varphi \in Form(L)$, hogy $K \models \varphi$ és $M \models \neg\varphi$.*

Bizonyítás. Álljanak K'' és M'' rendre azokból a struktúrákból, melyek elemien ekvivalensek K illetve M egy-egy elemével. Ekkor K'' és M'' zárt az elemi ekvivalenciára. Megmutatjuk, hogy ultraszorzatra is zártak: ha például $\mathcal{A}_i \in K''$, $i \in I$ adott struktúrák, akkor ezek mindegyike elemien ekvivalens bizonyos K-beli $\mathcal{B}_i$ struktúrákkal, és a Łoś-lemma miatt világos, hogy az $\mathcal{A}_i$-k ultraszorzata elemien ekvivalens lesz a $\mathcal{B}_i$-k azonos ultraszűrő szerint vett ultraszorzatával, de ez utóbbi ultraszorzat K-beli.

A 2.25 tétel szerint K'' és M'' axiomatizálható osztályok, mondjuk T_K axiomatizálja K''-t és T_M axiomatizálja M''-t. Továbbá diszjunktak is: ha $\mathcal{A} \in K'' \cap M''$ lenne, akkor lennének olyan $\mathcal{B} \in K$ és $\mathcal{C} \in M$ struktúrák, melyekre $\mathcal{B} \equiv_e \mathcal{A} \equiv_e \mathcal{C}$, de ekkor Shelah 2.58 Izomorfizmustétele miatt $\mathcal{B}$-nek és $\mathcal{C}$-nek lenne izomorf ultrahatványa. K és M ultraszorzatra zárt, ezért ennek az ultrahatványnak $K \cap M$-ben kéne lennie, de ez lehetetlen, mert K és M diszjunkt.

Most megmutatjuk, hogy van olyan $\varphi \in Form(L)$, melyre $K'' \models \varphi$ és $M'' \models \neg\varphi$. Ha nem így lenne, akkor T_K minden véges részhalmazának lenne M''-beli modellje, és így a kompaktsági tétel (és M'' ultraszorzatra való zártsága) miatt T_K-nak lenne M''-beli modellje, ami lehetetlen, mert már beláttuk, hogy M'' és K'' diszjunktak. Mivel $K \subseteq K''$ és $M \subseteq M''$, ezért az utolsó állítás következik. Végül a $K' = Mod(\varphi), M' = Mod(\neg\varphi)$ választással kaphatjuk meg a szeparáló végesen axiomatizálható osztályokat. ∎

Feladat. Legyen L_1 és L_2 két elsőrendű nyelv, legyen L az a nyelv, mely pontosan azokat a szimbólumokat tartalmazza, melyek L_1-ben és L_2-ben is szerepelnek. Tegyük fel, hogy $\varphi \in Form(L_1)$ és $\psi \in Form(L_2)$ úgy, hogy $\varphi \models \psi$. Azt mondjuk, hogy $\theta \in Form(L)$ a φ és ψ egy interpolánsa, ha $\varphi \models \theta$ és $\theta \models \psi$. Igazoljuk Craig interpolációs tételét: ha $\varphi \models \psi$, akkor e formuláknak van $Form(L)$-beli interpolánsa. (Útmutatás: alkalmazzuk a 3.5 Szeparációs tételt.)

3.6. Tétel. *Legyen $L \subseteq L'$ két nyelv, $R \in L' - L$ és legyen T egy elmélet L'-ben. Ekkor*

(1) Ha T teljes, és T implicit módon definiálja R-t L felett, akkor R explicit módon is definiálható T-ben L felett.

(2) (Beth definiálhatósági tétele.) Az előző (1) állítás érvényben marad, ha T tetszőleges (azaz nem feltétlenül teljes) elmélet.

Bizonyítás. Kezdjük (1) igazolásával: legyen T teljes, és tegyük fel, hogy T implicit módon definiálja R-t L felett. Ha $\mathcal{A} \models T$ és f az $\mathcal{A}|_L$ stuktúra egy automorfizmusa, akkor $\mathcal{B} = \langle A, f(Q)\rangle_{Q \in L'}$ egy olyan modellje T-nek, melyre $\mathcal{A}|_L = \mathcal{B}|_L$ (hiszen f megtartja az L-beli szimbólumok interpretációit). Ekkor azonban $R^{\mathcal{A}} = f(R^{\mathcal{A}})$ is teljesül R implicit definiálhatósága miatt. Tehát azt kaptuk, hogy T modelljei L-reduktumainak minden automofizmusa megtartja R interpretációját, ezért Svenonius 3.4 definiálhatósági tétele miatt T-ben R explicit módon definiálható L felett.

(2) igazolásához szabaduljunk most meg a T teljességére vonatkozó feltételtől. Először azt látjuk be, hogy az L nyelv formuláinak van olyan véges Φ részhalmaza, hogy T minden modelljében R interpretációja megegyezik Φ valamelyik eleme által definiált relációval. Indirekt módon tegyük fel ugyanis, hogy ez nincs így. Ez a feltevés azt jelenti, hogy a következő Σ formulahalmaz minden véges részének van modellje:

$$\Sigma = T \cup \{R \not\Leftrightarrow \phi : \ \phi \in Form(L)\}.$$

A 2.22 kompaktsági tétel miatt ekkor Σ-nak van egy $\mathcal{A}$ modellje, amiben tehát $R^{\mathcal{A}}$ egyetlen L-formula jelentésével sem esik egybe. Ám $T' = Th(\mathcal{A})$ egy teljes elmélet, és $\Sigma \supseteq T$ miatt R T'-ben is implicit módon definiálható L felett. Ezért (1) miatt explicit módon is definiálható, tehát $R^{\mathcal{A}}$ mégis egybeesik T'-beli definiáló formulájának $\mathcal{A}$-beli jelentésével, ellentmondás.

Van tehát L-formuláknak egy véges $\Phi = \{\phi_0, ..., \phi_{n-1}\}$ halmaza úgy, hogy

$$(*) \qquad T \models \vee_{i<n} \forall \bar{x}(R(\bar{x}) \Leftrightarrow \phi_i(\bar{x})).$$

Feltehető, hogy Φ elemei páronként nem ekvivalensek T-ben. Most n szerinti indukciót alkalmazunk. Ha $n = 1$, akkor T minden modelljében ϕ_0 jelentése és R interpretációja egybeesik, ezért ekkor ϕ_0 explicit módon definiálja R-t T-ben. Tegyük most fel, hogy ha T' olyan elmélet, melyhez van L-formuláknak egy legfeljebb $n-1$ elemű Φ' halmaza úgy, hogy T' minden modelljében R interpretációja azonos Φ' valamelyik elemének jelentésével, akkor R explicit módon is definiálható T'-ben L felett, és ahogy $(*)$-ban is szerepel, a mi T elméletünkhöz egy n-elemű Φ tartozik. Legyen $T' = T \cup \{\vee_{i<n-1}(R \Leftrightarrow \phi_i) \wedge (R \not\Leftrightarrow \phi_{n-1})\}$, legyen $K = Mod(T')$ és legyen $M = Mod(T \cup \{R \Leftrightarrow \phi_{n-1}\})$. Megmutatjuk, hogy van olyan φ L-formula, hogy $K \models \varphi$ és $M \models \neg\varphi$. Ez azért van így, mert K és M axiomatizálható osztályok, ezért L-reduktumaik ultraszorzatra zártak. Továbbá, mivel T implicit módon definiálja R-t L felett, ezek a reduktumok diszjunktak. Az L-reduktumokra a 3.5 szeparációs tételt alkalmazva kapjuk φ-t. Az indukciós feltevést T'-re alkalmazva kapjuk, hogy van olyan σ L-formula, mely T'-ben (vagyis K minden elemében) explicit módon definiálja R-t. Végül legyen

$$\phi = (\varphi \wedge \sigma) \ \vee \ (\neg\varphi \wedge \phi_{n-1}).$$

Ellenőrizzük, hogy ez az L-formula T-ben is definiálja R-t. Legyen $\mathcal{A} \models T$, ekkor a konstrukció miatt $\mathcal{A} \in K$ vagy $\mathcal{A} \in M$ közül pontosan az egyik teljesül. Ennek megfelelően $\mathcal{A} \models \varphi$ vagy $\mathcal{A} \models \neg\varphi$. Az első esetben $||\phi||^{\mathcal{A}} = ||\sigma||^{\mathcal{A}}$, de ekkor a konstrukció K-ra vonatkozó része szerint σ definiálja R-t; a másik esetben $||\phi||^{\mathcal{A}} = ||\phi_{n-1}||^{\mathcal{A}}$, és ekkor az M-re vonatkozó rész miatt ϕ_{n-1} definiálja R-t. ∎

Megjegyezzük, hogy Beth eredeti bizonyítása sokkal „elemibb” technikákat használt, és Beth definiálhatósági tétele sok más módon, jóval egyszerűbben is igazolható. Mi azért választottuk a fenti bizonyítást, hogy egyrészt illusztráljuk az eddig kiépített apparátusunk erejét, másrészt, hogy ne kelljen hosszas kitérőt tennünk a más bizonyításokban esetleg felhasználásra kerülő segédfogalmak bevezetésével és vizsgálatával kapcsolatban.

A definiálhatóság témakörétől az alábbi tétellel búcsuzunk; ez a tétel bizonyos struktúrák *paraméterrel* definiálható relációi és a struktúrák automorfizmuscsoportja között ad meg egy Galois-kapcsolatot.

3.7. Tétel. *Legyen κ egy számosság és legyen $\mathcal{A}$ egy κ^+-szaturált, erősen κ^+-homogén L-struktúra. Tegyük fel, hogy az $R \subseteq {}^nA$ reláció $\mathcal{A}$-ban paraméterekkel definiálható és $X \in [A]^{\leq\kappa}$. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.*

(1) R definiálható X-beli paraméterekkel is.

(2) Ha $\mathcal{A}$ egy automorfizmusa fixen hagyja X összes elemét, akkor megtartja R-t is.

Megjegyzés. (2)-ben NEM azt kötöttük ki, hogy az X-en identikusan ható automorfizmusok identikusan hatnak az R-beli sorozatokon is. Csak annyit írtunk elő, hogy az R-beli sorozatok ilyen automorfizmusok szerinti képe szintén R-beli.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2) egyszerű: tegyük fel, hogy az $\bar{a} \in X$ sorozat és a $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ L-formula olyan, hogy $R = \{\bar{b} \in {}^nA : \mathcal{A} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})\}$. Legyen f olyan automorfizmusa $\mathcal{A}$-nak, mely X elemein identikusan hat. Ekkor

$$\bar{b} \in R \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi(f(\bar{b}), f(\bar{a})) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi(f(\bar{b}), \bar{a}) \Leftrightarrow f(\bar{b}) \in R.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) bizonyításához tegyük fel, hogy R (nem feltétlenül X-beli !) paraméterekkel definiálható, mondjuk $R = \varphi(A, \bar{a})$ valamilyen $\bar{a} \in A$-ra és φ L-formulára, és természetesen tegyük fel (2)-t.

Először belátjuk, hogy ha $\bar{a}' \in {}^nA$ típusa X felett azonos $\bar{a}$ X feletti típusával, akkor $\varphi(\bar{x}, \bar{a}')$ is R-t definiálja, azaz R-t „sok más paraméterrel” is definiálhatjuk. Valóban, ha $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/X) = tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}'/X)$, akkor az az $f_0 : X \cup \bar{a} \to A$ függvény, mely X-en az identitás és $\bar{a}$-t $\bar{a}'$-re viszi, egy elemi leképezés. Ekkor $\mathcal{A}$ erős κ^+-homogenitása miatt van olyan f automorfizmus, mely kiterjeszti f_0-t. Tehát f X-et elemenként fixen hagyja, és $\bar{a}$-t $\bar{a}'$-re képezi. Ekkor viszont (2) miatt f megtartja R-t is, ezért

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a}') \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi(f^{-1}(\bar{b}), \bar{a}) \Leftrightarrow f^{-1}(\bar{b}) \in R \Leftrightarrow \bar{b} \in R$$

vagyis $\varphi(\bar{x}, \bar{a}')$ valóban R-t definiálja.

Most azt igazoljuk, hogy $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/X)$-nek van olyan véges Φ részhalmaza, hogy

$$(*) \qquad \mathcal{A} \models \wedge\Phi(\bar{a}') \text{ esetén } \varphi(\bar{x}, \bar{a}') \text{ is } R\text{-t definiálja.}$$

Ha ez nem így lenne, akkor a következő Σ formulahalmaz végesen realizálható lenne:

$$\Sigma = \{\psi(\bar{v}) \wedge (\exists \bar{x})(\varphi(\bar{x}, \bar{v}) \not\Leftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{a})) : \ \psi \in tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/X)\}.$$

Ezért $\mathcal{A}$ κ^{+}-szaturáltsága miatt lenne egy $\bar{a}' \in A$, mely realizálná Σ-t. Ez azonban lehetetlen, mert ekkor egyrészt $\bar{a}$ és $\bar{a}'$ X feletti típusa megegyezne, de $\varphi(\bar{v}, \bar{a}')$ mégse definiálná R-t, ellentétben az előző bekezdésben igazoltakkal.

Van tehát egy $(*)$ tulajdonságú véges Φ L_X-beli formulahalmaz. Legyen végül $\phi(\bar{v}) = \exists \bar{y}(\wedge\Phi(\bar{y}) \wedge \varphi(\bar{v}, \bar{y}))$. Világos, hogy ϕ egy L_X-beli formula, be fogjuk látni, hogy R-t definiálja. Ha $\bar{b} \in R$, akkor $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})$, ezért az $y = \bar{a}$ választással igazzá válik ϕ kvantor utáni része, vagyis ekkor $\bar{b} \in \phi(A)$. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq \phi(A)$. Fordítva, ha $\bar{b} \in \phi(A)$, akkor van olyan $\bar{a}'$, hogy

$$\text{(i) } \mathcal{A} \models \wedge\Phi(\bar{a}') \text{ és} \qquad \text{(ii) } \mathcal{A} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a}').$$

Az (i) feltétel miatt $\varphi(\bar{v}, \bar{a}')$ szintén R-t definiálja így (ii) miatt $\bar{b} \in R$. Ezzel beláttuk, hogy $\phi(A) \subseteq R$, azaz $R = \phi(A)$. ∎

3.3. Nemsztenderd Analízis

Ebben a részben egy A. Robinson-tól származó módszerből adunk ízelitőt.

Newton idejében a differenciál- és integrálszámítás elméleti megalapozása még nem állt rendelkezésre. Ezért többek között Newton maga is úgy alkalmazta az analízis módszereit, hogy közben végtelen nagy és végtelen kicsi mennyiségekről és ezek tulajdonságairól gondolkodott. Zseniális szemlélete alapján sokszor helyesen érvelt, de néhány esetben tévedett is. Tévedései (és olykor helyes, de bonyolultabb gondolatmenetei) kapcsán sokan faggatták a végtelen kicsi és végtelen nagy mennyiségek tulajdonságairól, és válaszaiban néhányszor egymásnak ellentmondó „tulajdonságok" is szerepeltek.

Leibniz felismerte, hogy a végtelen mennyiségek korabeli elmélete problematikus. Az Archimédeszi Axióma miatt minden valós szám csak „véges nagy", és nincsenek pozitív, de „végtelen kicsi" valós számok. Leibniz ezért programként tűzte ki, hogy például a komplex számok mintájára terjesszük ki a valós számok struktúráját új „végtelen nagy" és „végtelen kicsi" mennyiségekkel, derítsük ki ezek tuajdonságait, és erre alapozva építsük ki az analízis alapjait most már ellentmondások, szemléletre hivatkozások nélkül.

Leibniz programjának megvalósítására sok kisérlet történt, eleinte kevés sikerrel. A XIX. század elején aztán Bolzano és Weierstrass az $\varepsilon - \delta$ technikával „kiirtotta" a végtelen kis mennyiségeket az analízis alapjaiból; ezzel a technikával szabatosan fel lehet építeni a differenciál- és integrálszámítást. Leibniz programja egy időre feledésbe is merült.

Ugyanakkor az analízis specialistái sejtéseik kialakítására, vagy egyes érvelések lerövidítése érdekében továbbra is használták a végtelen kicsi és végtelen nagy fogalmát. Ezért továbbra is úgy tűnt, hogy intuíciójuk mögött van valamilyen matematikai „realitás” (azaz van a háttérben egy struktúra, amiben ezek az intuitív számolások precízen megismételhetők).

A Leibniz-programot végülis A. Robinson valósította meg 1961-ben. Most az Ő konstrukcióját ismertetjük. A nemsztenderd analízis egy nagy terület, nem célunk részletesen elmélyedni a témában. Éppen csak ízelítőt szeretnénk adni. Az érdeklődő olvasó [4]-ben talál további részleteket: ez magyar nyelven írott, kitűnő stílusú és sok alkalmazást áttekintő mű.

Legyen $\mathcal{F}$ egy nemfő ultraszűrő ω-n, ezt a fejezet végéig rögzítettnek képzeljük. Legyen $\Re$ a valós számok halmaza. Ebben a részben ${}^*\Re$-el (is) jelöljük az ${}^\omega\Re/\mathcal{F}$ ultrahatványt. Hasonlóan, ha P egy reláció vagy (akár többváltozós) függvény $\Re$-en, akkor ${}^*P$-vel jelöljük azt a relációt vagy függvényt az ultrahatványban, melynek minden koordinátája az eredeti P. Továbbá, eddigi szokásainknak megfelelően a diagonális beágyazás szerint $\Re$ elemeit azonosítjuk ${}^*\Re$ bizonyos elemeivel. Mint látni fogjuk, a keresett bővítés, amely tehát végtelen kicsi és nagy számokat is tartalmaz, ${}^*\Re$ lesz. $\Re$ elemeit „sztenderd számoknak”, ${}^*\Re - \Re$ elemeit „nemsztenderd számoknak” is szokás nevezni.

Figyeljük meg, hogy a 2.40 tétel miatt ${}^*\Re$ egy $\aleph_1$-szaturált struktúra, ezért ${}^*\Re$-ben realizálható a $\{0 < v_0\} \cup \{v_0 < 1/n + 1 :\ n \in \omega\}$ formulahalmaz. Ez az elem pozitív, de minden pozitív valós számnál kisebb (azaz végtelen kicsi). Hogy vannak ilyen elemek ${}^*\Re$-ban, az közvetlenül is látszik: legyen $a = \langle 1,\ 1/2,\ 1/3, \ldots\rangle/\mathcal{F}$. Ennek minden koordinátája pozitív, és minden pozitív valós számnál majdnem minden koordinátája kisebb. Ezért a pozitív, de minden pozitív valós számnál kisebb.

3.8. Definíció. *${}^*\Re$ egy a eleme végtelen kicsi („infinitezimális”), ha $|a|$ pozitív, de minden pozitív valós számnál kisebb. Az $a, b \in {}^*\Re$ elemek végtelen közel vannak egymáshoz, ha $a - b$ végtelen kicsi vagy nulla.*

Feladat. Igazoljuk, hogy az „x végtelen közel van y-hoz” egy ekvivalenciareláció.

Most bebizonyítjuk a terület egy jellemző, és nagyon intuitív tételét. Ezek szerint egy függvény akkor és csak akkor folytonos, ha végtelen közeli elemek képe végtelen közeli.

3.9. Tétel. *A következő két állítás ekvivalens.*

(1) Az $f : \Re \to \Re$ függvény (a közönséges értelemben) folytonos az $x_0 \in \Re$ pontban.

(2) Ha $a \in {}^*\Re$ végtelen közel van x_0-hoz, akkor ${}^*f(a)$ és ${}^*f(x_0)$ is végtelen közeliek.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f folytonos x_0-ban. Ez azt jelenti, hogy

$$\langle \Re, f \rangle \models (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Legyen most $a \in {}^*\Re$ végtelen közel x_0-hoz, és legyen minden $n \in \omega$-ra $\varepsilon_n = 1/(n+1)$. Mivel ezek közönséges valós számok, ezért $\Re$-ben minden $n \in \omega$-ra igaz, hogy „$(\exists \delta_n > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_n)$”. Legyenek $d_n \in \Re$ olyan (sztenderd) valós számok, hogy $\delta_n = d_n$-el az előző formula igaz legyen. Ekkor tehát minden $n \in \omega$-ra

$$\langle \Re, f \rangle \models (\forall x)(|x - x_0| < d_n \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_n).$$

De $\langle {}^*\Re, {}^*f \rangle$ egy elemi bővítése $\langle \Re, f \rangle$-nek, ezért

$$(a) \qquad \langle {}^*\Re, {}^*f \rangle \models (\forall x)(|x - x_0| < d_n \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_n)$$

is fennáll. Mivel azonban a végtelen közel van x_0-hoz, és d_n sztenderd valós szám, minden $n \in \omega$-ra teljesül, hogy $|a - x_0| < d_n$. Ezért (a) miatt minden n-re $|f(a) - f(x_0)| < \varepsilon_n = 1/(n + 1)$ is teljesül, vagyis $f(x_0)$ és $f(a)$ végtelen közel vannak egymáshoz.

Nézzük a fordított irányt, azaz tegyük fel, hogy az x_0-hoz végtelen közeli számok f szerinti képe végtelen közel van $f(x_0)$-hoz. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges sztenderd valós szám, és legyen γ végtelen pici, de pozitív elem ${}^*\Re$-ben. Ekkor $\langle {}^*\Re, {}^*f \rangle$-ben igaz lesz, hogy „$(\forall x)(|x - x_0| < \gamma \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$”, hiszen, ha $|x - x_0| < \gamma$, akkor x és x_0 végtelen közeliek, így feltevésünk szerint $f(x)$ és $f(x_0)$ is végtelen közeliek, ezért $|f(x) - f(x_0)|$ kisebb a sztenderd ε-nál. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\langle {}^*\Re, {}^*f \rangle \models (\exists \delta)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

hiszen például a $\delta = \gamma$ egy megfelelő elem. Mivel $\langle \Re, f \rangle$ és $\langle {}^*\Re, {}^*f \rangle$ elemien ekvivalensek, kapjuk, hogy

$$\langle \Re, f \rangle \models (\exists \delta)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Végül $\varepsilon \in \Re$ tetszőleges pozitív szám volt, ezért f valóban folytonos x_0-ban. ∎

A nemsztenderd módszer sem „csodafegyver”, nem jönnek ki a tételek maguktól. Mindössze arról van szó, hogy egy más technikát, más apparátust biztosít, mely néha intuitívabb, mint a sztenderd okoskodások. Például Robinson nemsztenderd módszerekkel oldott meg egy - önadjungált operátorok invariáns altereivel kapcsolatos - problémát, melyet korábban a sztenderd módszerekkel hosszú évekig nem sikerült megoldania senkinek. Máskor viszont a nemsztenderd módszer bizonyul nehézkesebbnek. Hogy mikor melyik technikát célszerű használni, az a probléma jellegétől (és persze a személyes ízléstől) függ.

4. Kevés típust realizáló modellek

A 2.8 fejezetben szaturált modellek konstrukcióit vizsgáltuk. Ezekben a struktúrákban *minden* (elég kicsi) halmaz feletti típus realizálható. Ebben a fejezetben a másik végletet vizsgáljuk: vannak-e egy elméletnek olyan modelljei, melyekben bizonyos típusok nem realizálódnak, illetve vannak-e olyan modellek, melyekben összesen nem túl sok típus realizálható?

Mindenek előtt meg kell mondanunk, mit értünk *elméletek* típusain, hisz eddig csak struktúrák típusaival foglalkoztunk.

4.1. Definíció. *Legyen T elmélet az L nyelven, és legyen $\bar{v} = \langle v_0, v_1, ...\rangle$ változók egy rögzített (akár végtelen hosszú) sorozata. A $p \in Form(L)$ formulahalmazt T egy típusának nevezzük, ha*

- *p elemeiben legfeljebb $\bar{v}$-beli változók fordulnak elő szabadon,*
- *Ha p_0 véges része p-nek, akkor $T \cup \{\exists\bar{v} \wedge p_0\}$-nak van modellje,*
- *Ha φ olyan formula, melyben csak $\bar{v}$-beli változók fordulnak elő szabadon, akkor $\varphi \in p$ vagy $\neg\varphi \in p$.*

T típusainak halmazát $S(T)$-vel jelöljük; ha hangsúlyozni akarjuk a típus változóit is, akkor értelemszerűen alkalmazzuk majd az $S_{\bar{v}}(T)$ illetve az $S_n(T)$ jelöléseket is.

A 2.35 definíció utáni megjegyzéseink mind érvényesek most is.

Most megmutatjuk, hogy az előbbi definíció általánosítja eddigi definíciónkat, vagyis a struktúrák üreshalmaz feletti típusai azonosak elméleteik típusaival; vagy másképp fogalmazva: teljes (és konzisztens) elméletek típusai azonosak a modelljeik üreshalmaz feletti típusaival.

Legyen tehát T teljes (és konzisztens) elmélet és legyen $\mathcal{A}$ egy tetszőleges modellje T-nek. Világos, hogy $\mathcal{A}$ üreshalmaz feletti típusai egyúttal T-nek is típusai. Fordítva, legyen $p \in S(T)$ egy típus. Ekkor $p \in S^{\mathcal{A}}(\emptyset)$ is teljesül, hiszen p elemei az előírt alakú formulák, minden formula, vagy a negáltja p-beli; végül, mivel minden $p_0 \in [p]^{<\omega}$-ra $T \cup \{\exists\bar{v} \wedge p_0\}$-nak van modellje, és T teljes, ez csak úgy lehet, ha $T \models \exists\bar{v} \wedge \varphi$ és így $\mathcal{A} \models T$ miatt p_0 $\mathcal{A}$-ban is realizálható. Egy teljes elmélet típusai tehát egy modellje (mindegy, hogy melyik !) üreshalmaz feletti típusaival azonos, ezért ekkor $S(T)$ is egy kompakt Hausdorff-tér. Most megmutatjuk, hogy ez nem teljes T elméletek esetében is így van.

Ha T egy elmélet és φ, ψ formulák, akkor $\varphi \sim_T \psi$ jelentse azt, hogy $T \models \varphi \Leftrightarrow \psi$. Ekkor $\sim_T$ ekvivalenciareláció, amely kompatibilis a Boole-műveletekkel: ha $\varphi \sim_T \varphi'$ és $\psi \sim_T \psi'$ akkor $\varphi \wedge \psi \sim_T \varphi' \wedge \psi'$ és $\neg\varphi \sim_T \neg\varphi'$. Ezért képezhetjük a formulák Boole-algebrájának $\sim_T$ szerinti faktorát. Ezt a faktort T Lindenbaum-Tarski algebrájának nevezik.

4.2. Tétel. *Legyen T egy elmélet az L nyelven, legyen $\bar{v}$ változók egy rögzített sorozata és (mint eddig is) jelöljük $F_{\bar{v}}$-vel azoknak az elsőrendű formuláknak a Boole-algebráját, melyekben legfeljebb $\bar{v}$ elemei fordulnak elő szabadon. Ekkor $S_{\bar{v}}(T)$ azonosítható $F_{\bar{v}}/\sim_T$ Stone-terével.*

Bizonyítás. Ha $p \in S_{\bar{v}}(T)$ akkor legyen $p^* = \{\varphi/\sim_T : \varphi \in p\}$. Könnyű ellenőrizni, hogy p^* egy ultraszűrő $F_{\bar{v}}/\sim_T$-n.

Fordítva, ha p^* egy ultraszűrő $F_{\bar{v}}/\sim_T$-en, akkor a $p = \{\varphi \in F_{\bar{v}} : \varphi/\sim_T \in p^*\}$ formulahalmaz T egy típusa. Végül az is világos, hogy a $p \leftrightarrow p^*$ megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. ∎

4.1. Típuselkerülési tételek

Ezek után az előkészületek után rátérhetünk fejezetünk fő kérdésének vizsgálatára.

4.3. Definíció. *Ha T egy elmélet az L nyelven, $p \in S(T)$, és $\mathcal{A} \models T$ melyben p nem realizálható, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ elkerüli p-t.*

Ha p a T elmélet izolált típusa (vagyis $p \in S(T)$ izolált pont a Stone-topológiában), akkor a 2.8 tétel szerint p egy fő ultraszűrő, azaz van p-ben egy olyan $\varphi(\bar{v})$ formula, melyből minden más p-beli formula következik (mod T). Ha $T \cup \{\neg\exists\bar{v}\varphi\}$-nek van modellje, akkor ez a modell nyilván elkerüli p-t. Tegyük fel most, hogy $T \models \exists\bar{v}\varphi$. Ekkor tehát $\exists\bar{v}\varphi(\bar{v})$ igaz T minden modelljében. Ez viszont azt jelenti, hogy T minden modelljében realizálható p. Ezzel izolált típusok elkerülhetőségét tisztáztuk: T egy izolált típusa akkor és csak akkor kerülhető el, ha a típus izoláló formulája nem következménye T-nek.

Mi a helyzet a nem izolált típusokkal? Célunk megmutatni, hogy ha T nyelve megszámlálható, akkor T minden nem-izolált típusát elkerüli T egy megszámlálható modellje. Valójában többet fogunk igazolni: nem izolált típusok előre adott „kicsi" halmazaihoz vannak T-nek olyan megszámlálható modelljei, melyek az előírt típusok mindegyikét elkerülik.

Legyen X egy topologikus tér. Egy $K \subseteq X$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha lezártjának belseje üres. Ez azt jelenti, hogy

egyetlen pont sem lehet belső pontja K lezártjának, vagyis
egyetlen nemüres nyílt halmaz sem lehet része K lezártjának vagyis
minden nemüres nyílt halmaznak van K lezártján kívüli pontja (és mivel K lezártja zárt halmaz)
minden nemüres nyílt halmaznak van K-tól diszjunkt nemüres nyílt részhalmaza.

A típusok Stone-terére alkalmazva az előbbi okoskodást, azt kapjuk, hogy az $E \subseteq S(T)$ halmaz akkor és csak akkor sehol sem sűrű, ha minden olyan ε formulához, melyre teljesül, hogy $T \models \exists\varepsilon$, van egy δ formula úgy, hogy $\emptyset \neq N_\delta \subseteq N_\varepsilon$ és $E \cap N_\delta = \emptyset$. Még egyszerűbben: ha $T \models \exists\varepsilon$, akkor van olyan δ, hogy $T \models (\exists\delta) \wedge (\delta \Rightarrow \varepsilon)$ és minden $p \in E$-re $\neg\delta \in p$ teljesül.

Emlékeztetünk rá, hogy egy topologikus tér sehol sem sűrű részhalmazainak megszámlálható unióiként előálló halmazokat a tér első kategórájú részhalmazainak nevezzük. Világos, hogy első kategórájú halmazok részhalmazai és megszámlálható uniói is első kategóriájú halmazok.

4.4. Tétel. *(Típuselkerülési Tétel.) Legyen L megszámlálható nyelv és legyen T olyan elmélet az L nyelven, melynek vannak végtelen modelljei. Minden $n \in \omega$-ra legyen $E_n \subseteq S_{r_n}(T)$ típusok egy első kategóriájú halmaza. Ekkor van T-nek olyan megszámlálható modellje, mely mindegyik E_n mindegyik elemét elkerüli.*

Természetes gondolat, hogy a típuselkerülési tételt Baire kategória-tételéből próbáljuk bizonyítani. (Baire kategória-tétele szerint kompakt Hausdorff-terek nem állnak elő megszámlálható sok sehol sem sűrű (vagy, ami ugyanaz, megszámlálható sok első kategóriájú) részhalmazuk unióiként).

A típuselkerülési tétel valóban igazolható ilyen módon, de egy ilyen bizonyítás túl sok technikai előkészületet igényelne. Ezért egy olyan bizonyítást mutatunk, mely nem használja Baire kategória-tételét. A típuselkerülési tétel és a Baire-tétel kapcsolatára még visszatérünk.

Bizonyítás. Mindegyik E_n sehol sem sűrű halmazok megszámlálható uniója, ezért az E_n-eket kicserélve ezekre a sehol sem sűrű halmazokra, továbbra is típusok egy megszámlálható rendszerét kapjuk. Emiatt feltehetjük, hogy az E_n-ek sehol sem sűrű halmazok.

Legyen L' az L nyelv bővítése az új $\{c_i : i \in \omega\}$ konstansszimbólumokkal. Legyen s egy olyan ω-típusú sorozat, melyben végtelen sokszor fordul elő L' minden formulája, és melyben minden $\langle n, \bar{c}\rangle$ pár előfordul, ahol $n \in \omega$ és $\bar{c}$ az új konstansszimbólumokból képzett r_n hosszú sorozat (és más nem fordul elő s-ben). Meg fogjuk adni L' elméleteinek egy növő sorozatát úgy, hogy

(1) minden n-re T_n konzisztens, $T_n - T$ véges,

(2) Ha $s_{n-1} = \exists v\varphi(v)$ és $s_{n-1} \in T_{n-1}$, akkor van olyan m, hogy $\varphi(c_m) \in T_n$,

(3) Ha $s_{n-1} \in Form(L')$, akkor vagy $s_{n-1} \in T_n$ vagy $\neg s_{n-1} \in T_n$,

(4) Ha $s_{n-1} = \langle k, \bar{c}\rangle$, akkor van olyan φ formula, hogy minden $p \in E_k$-ra $\neg\varphi(\bar{v}) \in p$ és $\varphi(\bar{c}) \in T_n$.

Legyen $T_0 = T$ és tegyük fel, hogy T_{n-1} már adott valamilyen $n \geq 1$-re úgy, hogy (1)-(4) fennáll. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor s_{n-1} az L' egy formulája. Mivel T_{n-1} konzisztens, ezért van modellje, ezen a modellen vagy s_{n-1}, vagy $\neg s_{n-1}$ igaz. Tehát $T_{n-1} \cup \{s_{n-1}\}$ és $T_{n-1} \cup \{\neg s_{n-1}\}$ közül legalább egyikük konzisztens. Legyen T'_{n-1} a T_{n-1} egy konzisztens bővítése s_{n-1}-el, vagy negáltjával. T_n majd T'_{n-1}

bővítése lesz, ezzel elértük, hogy (3) érvényben maradjon T_n-re is.

Ha s_{n-1} nem egzisztenciális kvantorral kezdődő formula, vagy ha $s_{n-1} = \exists v\varphi(v)$de $s_{n-1} \notin T_{n-1}$, akkor legyen $T_n = T'_{n-1}$, világos, hogy (1)-(4) érvényben marad. Ha $s_{n-1} = \exists v\varphi(v)$ és $s_{n-1} \in T_{n-1}$, akkor (1) miatt van olyan c_m, amely még nem fordul elő T'_{n-1}-ben. Legyen $T_n = T'_{n-1} \cup \{\varphi(c_m)\}$. Ekkor T_n konzisztens, hiszen T'_{n-1} az, ezért van modellje. $s_{n-1} \in T'_{n-1}$ miatt ebben a modellben $\exists v\varphi(v)$ is igaz, ezért ebben a modellben c_m-et tudjuk úgy interpretálni, hogy T_n egy modelljét kapjuk. Ezzel (1)-et igazoltuk, (2),(3) és (4) nyilvánvalóan öröklődik.

Tegyük most fel, hogy $s_{n-1} = \langle k, \bar{c}\rangle$. (1) miatt $T_{n-1} - T$ véges, legyen ϕ az a formula, melyet a $T_{n-1} - T$-beli formulák konjunkciójából úgy kapunk, hogy az új konstansszimbólumokat változószimbólumokra cseréljük, és a $\bar{c}$-t helyettesítő változók kivételével az új változókat egzisztenciálisan kvantáljuk. E_k sehol sem sűrű $S_{r_k}(T)$-ben, ezért van olyan T-vel konzisztens $\varphi(\bar{v})$ formula, melyre $\models \varphi(\bar{v}) \Rightarrow \phi$ és $N_\varphi \cap E_k = \emptyset$. Ekkor persze minden $p \in E_k$-ra $\neg\varphi \in p$. Legyen $T_n = T_{n-1} \cup \{\varphi(\bar{c})\}$. T_n-re (2),(3) és (4) nyilván teljesül, és (1)-ből is csak T_n konzisztenciája szorul indoklásra. De φ választása miatt T-nek van olyan $\mathcal{A}$ modellje, amiben φ realizálható. Ezekkel a realizációkkal interpretáljuk $\bar{c}$ elemeit. A többi konstansszimbólum is interpretálható megfelelő módon, mert ϕ következik φ-ből. Ezért $\mathcal{A}$-t ki tudjuk terjeszteni T_n egy modelljévé.

Legyen most $T_\omega = \cup_{n\in\omega} T_n$. (1) és a 2.22 kompaktsági tétel miatt ez is konzisztens, legyen $\mathcal{B}$ a T_ω egy modellje. Legyen $\mathcal{C}$ az a részstruktúrája $\mathcal{B}$-nek, melynek alaphalmaza az új c_i szimbólumok interpretációiból áll. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{C}$ elemi rész $\mathcal{B}$-ben. A Tarski-Vaught teszt (1.13 tétel) ellenőrzéséhez, tegyük fel, hogy φ az L' nyelv egy formulája és $\bar{c} \in C$ olyan sorozat, hogy $\mathcal{B} \models \exists v\varphi(v, \bar{c})$. (3) miatt T_ω teljes elmélet, ezért ekkor $\exists v\varphi(v, \bar{c}) \in T_\omega$, tehát van olyan $k \in \omega$, hogy $\exists v\varphi(v, \bar{c}) \in T_k$. Mivel s-ben az L' minden formulája végtelen sokszor fordul elő, van olyan $n > k$, hogy $s_{n-1} = \exists v\varphi(v, \bar{c})$, és így (2) miatt van olyan $m \in \omega$, hogy $\varphi(c_m, \bar{c}) \in T_n \subseteq T_\omega$. Ezért a Tarski-Vaught teszt teljesül, és $\mathcal{C}$ valóban elemi rész $\mathcal{B}$-ben; így $T_0 \subseteq T_\omega$ miatt $\mathcal{C} \models T$. Végül (4) miatt $\mathcal{C}$ elemei egyetlen $k \in \omega$-ra sem realizálnak E_k-beli típusokat. ∎

Mint említettük, Baire kategória-tételéből levezethető a típuselkerülési tétel, de ez sok technikai előkészületet igényelene. A fordított irány jóval egyszerűbb: Baire kategória-tételét a típusok Stone-tereire a következő módon lehet igazolni a típuselkerülési tétel segítségével. Legyenek minden $n \in \omega$-ra $E_n \subseteq S_k(T)$ sehol sem sűrű (vagy akár első kategóriájú) halmazok, azt kell igazolni, hogy $\cup_{n\in\omega} E_n \neq S_k(T)$. A típuselkerülési tétel szerint T-nek van olyan $\mathcal{A}$ megszámlálható modellje, mely minden n-re elkerüli E_n minden elemét. Válasszunk A-ból tetszőleges módon egy $\bar{a} \in {}^kA$ sorozatot, ekkor $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}) \notin \cup_{n\in\omega} E_n$, vagyis $\cup_{n\in\omega} E_n$ valóban nem fedi $S_k(T)$-t.

4.5. Következmény. *Legyen T egy elmélet a megszámlálható L nyelven. Ekkor*
(1) T minden nem-izolált típusa megszámlálható modellel elkerülhető.

(2) Ha minden $n \in \omega$-ra p_n T egy nem-izolált típusa, akkor T-nek van olyan megszámlálható modellje, mely mindegyik p_n-et elkerüli.

(3) Ha T teljes, akkor a $p \in S(T)$ típus akkor és csak akkor kerülhető el, ha p nem-izolált.

Bizonyítás. (1) Legyen $p \in S_k(T)$ egy nem-izolált típus. Ekkor az $E = \{p\}$ halmaz sehol sem sűrű: ha ugyanis φ tetszőleges formula, melyben legfeljebb $v_0, ..., v_{k-1}$ fordul elő szabadon, akkor φ nem izolálja p-t, ami azt jelenti, hogy van olyan $\psi \in p$, melyre $T \models \exists \bar{v}[\varphi(\bar{v}) \wedge \neg\psi(\bar{v})]$. Ekkor viszont $N_{\varphi\wedge\neg\psi} \cap E = \emptyset$ miatt E valóban sehol sem sűrű, ezért a típuselkerülési tétel miatt T egy megszámlálható modellje elkerüli E minden elemét, vagyis p-t.

(2) a megszámlálható sok nem izolált típust külön külön belefoglaljuk egy-egy 1-elemű (tehát sehol sem sűrű) halmazba: legyen $E_n = \{p_n\}$ és alkalmazhatjuk a 4.4 típuselkerülési tételt.

(3)-hoz jegyezzük meg, hogy azt már megmutattuk, hogy teljes elméletek esetében izolált típusok nem kerülhetők el; nem-izolált típusok viszont (1) miatt elkerülhetők. ∎

Megjegyezzük, hogy az előző tétel (2) pontjánál többet bizonyítottunk: egy első kategóriájú halmaz számossága megszámlálhatónál nagyobb is lehet. Sőt, tisztán topológiai alapokon is tovább élesíthető a típuselkerülési tétel.

4.6. Definíció. *Legyen X topologikus tér. Ekkor $N(X)$ az a legkisebb κ számosság, melyre X előáll κ darab sehol sem sűrű részhalmazának uniójaként. $N(X)$-et X Novak-számának nevezzük.*

Baire tétele szerint, egy kompakt Hausdorff-tér Novak-száma legalább $\aleph_1$. Ha valahonnan tudnánk, hogy egy konkrét T elmélet Stone-tereinek Novak-száma ennél nagyobb, akkor T típusainak megszámlálhatónál hosszabb, előre adott sehol sem sűrű halmazokból álló sorozata is elkerülhető T megszámlálható modelljeivel.

Most megvizsgáljuk, mi a helyzet, ha T nyelve megszámlálhatónál nagyobb. Ekkor a típuselkerülési tétel nem marad igaz a 4.4 tételben kimondott formában. Legyen ugyanis L egy nem megszámlálható nyelv, T egy konzisztens elmélet L-ben és $p \in S(T)$ egy típus. Előfordulhat, hogy p nem izolált típus, de van olyan megszámlálható $p_0 \subseteq p$, hogy T minden p_0-t realizáló modelljében p is realizálható, továbbá, hogy p_0 izolált típus $S(T|_{L_0})$-ban, ahol L_0 egy olyan megszámlálható nyelv, melyben p_0 formulái kifejezhetők. Ekkor p_0 T egyetlen modelljével sem kerülhető el, és emiatt p sem kerülhető el.

A gondot az okozta, hogy p-t egy kisebb számosságú részhalmaza teljesen meghatározta (ez a megszámlálható esetben azt jelenti, hogy p-t egyetlen eleme meghatározta). Ezért azt sejthetjük, hogy nagy nyelvek esetén azok a típusok lesznek elkerülhetők, melyeket egyetlen kicsi részhalmazuk sem izolál, azaz, akárhogy is veszünk p-ből egy $|p|$-nél kisebb számosságú p_0 részhalmazt, lesz olyan $q \neq p$ típus, melyre $p_0 \subseteq q$.

Valóban, a típuselkerülési tétel érvényben marad, ha értelemszerűen módosítjuk az izoláltságra vonatkozó feltételt. Legyen κ egy végtelen számosság és legyen X egy topologikus tér. Ekkor azt mondjuk, hogy $A \subseteq X$ egy G_κ-halmaz, ha A előáll κ-nál kevesebb nyílt halmaz metszeteként. A G_κ-halmazok egy topológia bázisát alkotják; a generált topológiát G_κ-topológiának nevezzük. A $p \in X$ pont κ-izolált, ha izolált pont a G_κ-topológiában, azaz ha van X-beli nyílt halmazoknak egy κ-nál kisebb rendszere, hogy e nyílt halmazok metszete az a halmaz, melynek p az egyetlen eleme. Világos, hogy az izolált pontok $\aleph_0$-izoláltak (vagy, ami ugyanaz, 2-izoláltak).

Ekkor tetszőleges (megszámlálhatónál nagyobb) L nyelvekre és L-beli T elméletekre igaz lesz, hogy ha $\kappa = |Form(L)|^+$, minden $n \in \omega$-ra $E_n \subseteq S_{r_n}(T)$ típusok egy sehol sem sűrű halmaza a G_κ-topológiában, akkor T-nek van olyan legfeljebb $|Form(L)|$ számosságú modellje, mely minden $n \in \omega$-ra elkerüli E_n minden elemét. A bizonyítás a 4.4 tétel bizonyításához hasonló. Mivel $|Form(L)| > \aleph_0$, ezért nem várható, hogy T-nek egyáltalán van megszámlálható modellje. Ezért $|Form(L)|$-darab új konstansszimbólumot adjungálunk a nyelvhez, és transzfinit rekurzióval konstruáljuk az elméletek sorozatát. Problémát csak a (4) pont értelemszerű módosításának megőrzése jelenthet. Azonban a transzfinit rekurzió közben mindig csak annyi extra formulával terjesztettük ki az elméletünket, amennyi még nem izolálja az E_n-eket, ezért most is mindig tudunk találni az eddigiekkel konzisztens formulákat, melyeknek negáltja szerepel E_n minden elemében, és emiatt a konstrukció pontosan úgy fejezhető be, mint a 4.4 tétel bizonyításában.

Megszámlálható nyelvek esetében felmerül a kérdés, hogy vannak-e olyan modellek, melyek „mindent elkerülnek, amit csak lehet”. Most ezt vizsgáljuk meg alaposabban.

4.2. Atomos modellek

Ebben az alfejezetben tovább vizsgáljuk a kevés típust realizáló modelleket. Ezzel kapcsolatban bevezetünk egy fontos modellosztályt; ezeket később sok más célra is fel fogjuk használni.

4.7. Definíció. *Legyen T egy elmélet. Az $\mathcal{A} \models T$ a T egy atomos modellje, ha minden $n \in \omega$-ra $\mathcal{A}$-ban T-nek csak izolált n-típusai realizálhatók.*

Nem minden elméletnek vannak atomos modelljei. Egzisztenciatétel helyett (illetve ennek hiányában) egy szükséges és elégséges feltételt adunk meg atomos modellek létezésére. E feltétel egyszerűsége ellenére később nagyon hasznos lesz.

4.8. Tétel. *Legyen L megszámlálható nyelv, és legyen T teljes és konzisztens elmélet L-en. Ekkor a következők ekvivalensek.*

(1) T-nek van atomos modellje.

(2) T-nek van megszámlálható atomos modellje.

(3) Minden $n \in \omega$-ra $S_n(T)$-ben az izolált típusok halmaza sűrű.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2): Legyen $\mathcal{A}$ a T egy atomos modellje, és legyen $\mathcal{B}$ ennek egy megszámlálható elemi része. Ekkor minden $\bar{b} \in B$-re $tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}/\emptyset) = tp^{\mathcal{B}}(\bar{b}/\emptyset)$, mert $\mathcal{B}$ elemi rész $\mathcal{A}$-ban. Ezek szerint $\mathcal{B}$-ben csak olyan típusok realizálhatók, amelyek $\mathcal{A}$-ban is realizálhatók, de ez utóbbi típusok mindegyike izolált. Ezért $\mathcal{B}$ a T egy megszámlálható atomos modellje.

(2) $\Rightarrow$ (3): Legyen $\varepsilon(\bar{v})$ egy T-vel konzisztens formula. T teljessége miatt ekkor $\exists \bar{v} \varepsilon(\bar{v})$ következménye T-nek, azaz igaz T-nek a megszámlálható atomos modelljében is (jelöljük ezt $\mathcal{B}$-vel). Van tehát olyan $\bar{b} \in B$, mely realizálja ε-t. De $\mathcal{B}$ atomos modell, ezért $p = tp^{\mathcal{B}}(\bar{b}/\emptyset)$ egy izolált típus. Ezek szerint $p \in N_\varepsilon$. Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges nemüres elemi nyílt N_ε-ban van izolált típus (ez volt p), vagyis az izolált típusok halmaza valóban sűrű.

(3) $\Rightarrow$ (1): Legyen n rögzített és legyen $E_n \subseteq S_n(T)$ a nem-izolált típusok halmaza. Megmutatjuk, hogy E_n sehol sem sűrű. Valóban, ha N_ε egy nemüres elemi nyílt halmaz $S_n(T)$-ben, akkor (3) miatt ebben van egy izolált p pont, legyen $N_\delta \subseteq N_\varepsilon$ a p-t izoláló elemi nyílt halmaz. Ekkor $E_n \cap N_\delta = \emptyset$, hiszen E_n elemei nem izoláltak, és N_δ egyetlen eleme izolált. Alkalmazzuk most $\langle E_n : n \in \omega \rangle$-ra a 4.4 típuselkerülési tételt: ezek szerint van T-nek olyan (megszámlálható) modellje, melyben csak izolált típusok realizálhatók. Ezért (1) (sőt, az erősebb (2) is) igaz. ∎

4.9. Tétel. *(Unicitástétel.) Legyen T egy teljes elmélet egy megszámlálható nyelven. Ekkor T megszámlálhatóan végtelen atomos modelljei (ha vannak ilyenek egyáltalán) izomorfizmus erejéig egyértelműek.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két megszámlálhatóan végtelen és atomos modellje T-nek; tegyük fel, hogy $A = \{a_n : n < \omega\}$ és $B = \{b_n : n < \omega\}$. Meg fogjuk adni $\langle f_n : \mathcal{A} \to \mathcal{B},\ n < \omega \rangle$ elemi leképezések egy növő sorozatát úgy, hogy a következők teljesüljenek minden n-re:

(1) $|dom(f_n)|$ véges,
(2) $a_{n-1} \in dom(f_n),\ b_{n-1} \in range(f_n)$.

Könnyű átgondolni, hogy f pontosan akkor elemi leképezés, ha $tp^{\mathcal{A}}(dom(f)/\emptyset) = tp^{\mathcal{B}}(range(f)/\emptyset)$.

Legyen $f_0 = \emptyset$ és tegyük fel, hogy $n < \omega$ és minden $m < n$-re f_m-et már megadtuk. Legyen $p = tp^{\mathcal{A}}(dom(f)^\frown a_{n-1}/\emptyset)$. A feltételek szerint ez egy izolált típusa T-nek, legyen $\varphi(\bar{v}, z)$ p izoláló formulája (itt $\bar{v}$-ben annyi változó szerepel, mint amekkora $dom(f_{n-1})$). Ekkor $\exists z \varphi(\bar{v}, z) \in tp^{\mathcal{A}}(dom(f_{n-1})/\emptyset)$ és ezért az indukcós feltevés szerint $\exists z \varphi(\bar{v}, z) \in tp^{\mathcal{B}}(range(f_{n-1})/\emptyset)$ is teljesül. Ezek szerint van olyan $b \in B$, melyre teljesül, hogy $\mathcal{B} \models \varphi(range(f_{n-1}), b)$. Mivel φ izolálta p-t, ezért $range(f_{n-1})^\frown b$ realizálja p-t, azaz ha f_{n-1}-et úgy terjesztjük ki, hogy a_{n-1}-et b-re képezze, akkor eredményül egy f' elemi leképezést kapunk. Mivel ebben a bekezdésben csak azt használtuk, hogy f_{n-1} elemi, teljesen hasonlóan kiterjeszthetjük f'-t (pontosabban inverzét) úgy, hogy b_{n-1} benne legyen a kierjesztés értékkészletében. Ez a kiterjesztés legyen f_n; ekkor (1) és (2) nyilván teljesül.

Végül $f = \cup_{n\in\omega} f_n$ lesz a keresett izomorfizmus. ∎

Feladatok. 1. Legyen L az a nyelv, amiben minden $n \in \omega$-ra van egy 1-változós R_n relációszimbólum, és a T elmélet álljon az összes $\exists v(R_{i_0}(v) \wedge ... \wedge R_{i_{n-1}}(v) \wedge \neg R_{j_0}(v) \wedge ... \wedge \neg R_{j_{m-1}}(v))$ alakú formulákból, melyekben az R-ekben fellépő összes index páronként különböző. Mutassuk meg, hogy T konzisztens.

2. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{A} \models T$, $a, b \in A$ és L' a T-nek olyan reduktuma, hogy a és b pontosan ugyanazokban az L'-höz tartozó $R_i^{\mathcal{A}}$ relációkban vannak benne, akkor az a függvény mely a-t b-be, b-t a-ba, a többi elemet sajátmagába képezi, egy automorfizmusa $\mathcal{A}|_{L'}$-nek.

3. Mutassuk meg (esetleg a 6.4 lemma és az előző feladatok felhasználásával), hogy T-nek nincs atomos modellje.

4.3. Megkülönböztethetetlen elemek

Most áttérünk egy másik technikára, melynek segítségével kevés típust realizáló modelleket lehet konstruálni. Az alapötlet az, hogy a modelljeinkben az elemek (típusai) „nagyon hasonlítsanak” egymásra. Ezt teszi precízzé a következő definíció.

4.10. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy struktúra, legyen $X \subseteq A$, legyen $n \in \omega$, legyen $B \subseteq {}^nA$, végül legyen $<$ egy rendezési reláció B-n. Azt mondjuk, hogy B megkülönböztethetetlen $<$ szerint X felett, ha minden $\varphi(\bar{v}, \bar{x}) \in Form(L_X)$-re és minden $\bar{b}, \bar{b}' \in B$ $<$ szerint monoton növő sorozatra teljesül, hogy*

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{b}, \bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{b}', \bar{x}).$$

Megjegyzések.

1. Ha X üres, akkor nem írjuk ki, illetve nem említjük. A nyelv alkalmas bővítése árán mindig feltehetjük, hogy X üres. Azért építettük mégis a definícióba, mert sok alkalmazásban egyszerre több nyelvet kell figyelembe venni, ezért ez a szóhasználat tűnik a legrövidebbnek, illetve legátláthatóbbnak.

2. A $<$ rendezés a struktúrán kívüli objektum, NEM tettük fel, hogy definiálható $\mathcal{A}$-ban. Ezt mindig külön meg kell adnunk. Az is elképzelhető, hogy egy B halmaz valamilyen rendezés szerint megkülönböztethetetlen, egy másik rendezés szerint viszont nem az. Ha B minden rendezése szerint megkülönböztethetetlen, akkor azt mondjuk, hogy B teljesen megkülönböztethetetlen, vagy, hogy B megkülönböztethetetlen *halmaz* (ezzel hangsúlyozva, hogy rendezés nélküli halmazról van szó).

3. Azt mondjuk, hogy B megkülönböztethetetlen *sorozat*, ha a rendezés, amely szerint megkülönböztethetetlen, úgy kapható, hogy B elemeit egy rendszám elemeivel indexeljük, és az egyik elem pontosan akkor kisebb a másiknál, ha indexeik ilyen

viszonyban vannak.

4. Legyen $\mathcal{A}$ egy struktúra, $B, X \subseteq {}^n A$, legyen $<$ rendezési reláció B-n és tegyük fel, hogy B $<$ szerint megkülönböztethetetlen X felett. Legyen $\varphi(\bar{v})$ egy formula és $\bar{b} \in B$ egy (nem feltétlenül monoton növő) sorozat. $\bar{b}$ monoton növő permutációját $\bar{b}^<$-vel jelöljük majd. φ változóinak alkalmas cseréivel, átnevezéseivel tudunk találni olyan $\varphi^<$ formulát, melyre $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{d}) \Leftrightarrow \varphi^<(\bar{d}^<)$ teljesül minden olyan $\bar{d} \in B$-re, melynek $<$ szerinti izomorfizmus-típusa azonos $\bar{b}$ $<$ szerinti izomorfizmus-típusával. Emiatt B pontosan akkor megkülönböztethetetlen $<$ szerint (X felett), ha a B elemeiből képzett sorozatok (X feletti) típusai csak az elemek $<$ szerinti izomorfizmustípusától függnek. Speciálisan, B minden eleme azonos típusú (X felett), sőt, a párok típusa csak attól függ, melyik elem a nagyobb, és így tovább.

4.11. Tétel. *(Egzisztenciatétel) Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges végtelen struktúra, legyen $X \subseteq A$ és legyen $\langle B, < \rangle$ tetszőleges végtelen rendezett halmaz. Ekkor $\mathcal{A}$-nak van olyan $\mathcal{A}'$ elemi bővítése, melyre $B \subseteq A'$ és melyben B megkülönböztethetetlen $<$ szerint X felett.*

Bizonyítás. Legyen $T = Th(\langle \mathcal{A}, x \rangle_{x \in X})$, továbbá B minden eleméhez vegyünk fel egy új konstansszimbólumot ($b \in B$-hez mondjuk b'-t). Legyen T' a következő elmélet:

$$T' = T \cup T_0 \cup T_1, \text{ ahol}$$

$$\begin{aligned} T_0 = \{ & \varphi(\bar{b}', \bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{d}', \bar{x}) : \bar{x} \in X \text{ és } \bar{b}, \bar{d} \in B, \\ & \bar{b} \text{ és } \bar{d} \text{ monoton növő} < \text{szerint } \} \text{ és} \\ T_1 = \{ & b' \neq d' : b \neq d \in B \}. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy T' minden véges része konzisztens. Ehhez legyen $T_n \subseteq T'$ azoknak a formuláknak a halmaza, melyek a B elemeihez rendelt konstansszimbólumokból legfeljebb n darabot tartalmaznak. Világos, hogy elég megmutatni, hogy minden $n \in \omega$-ra T_n minden véges része konzisztens. Legyen $\Sigma \in [T_n]^{<\omega}$, és legyen $\Sigma_i = \Sigma \cap T_i$ $(i = 0, 1)$. Legyen $A_0 \subseteq A$ tetszőleges megszámlálhatóan végtelen halmaz és legyen még $<^{\mathcal{A}_0}$ az A_0 egy rögzített jólrendezése. Megadjuk A_0 n-eseinek egy véges sok színnel való $\mu : [A_0]^n \to \mathcal{P}(\Sigma_0)$ színezését:

$$\mu(a) = \{ \varphi(\bar{v}, \bar{x}) : \ \mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}^{<^{\mathcal{A}_0}}, \bar{x}), \ \varphi(\bar{b}', \bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{d}', \bar{x}) \in \Sigma_0 \}$$

A 2.11 Ramsey-tétel miatt van olyan végtelen $C \subseteq A_0$, mely homogén μ-re. Ebből a végtelen sok elemből válasszunk annyi különböző elemet, ahány B'-beli konstansszimbólum van Σ-ban. Ezeket az elemeket rakjuk $<^{\mathcal{A}_0}$ szerint sorba, legyenek ezek mondjuk $c_0 <^{\mathcal{A}_0} c_1 <^{\mathcal{A}_0} \ldots <^{\mathcal{A}_0} c_{k-1} \in C$. Rakjuk $<$ szerint sorba a Σ-ban előforduló B'-beli konstansziszmbólumokat is: $b'_0 < b'_1 < \ldots < b'_{k-1}$. Végül interpretáljuk b'_i-t c_i-vel minden $i \in k$-ra. Ekkor $\mathcal{D} = \langle \mathcal{A}, b'_i \rangle_{i \in k} \models \Sigma$ a következők miatt. Mivel $\mathcal{A} \models T$, ezért $\mathcal{D} \models \Sigma \cap T$. A b'_i-k különbözők, ezért $\mathcal{D} \models \Sigma_1$. Végül, ha

$\varphi(\bar{b}', \bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{d}', \bar{x}) \in \Sigma_0$, akkor $\bar{c}_b$-vel jelölve a $\bar{b}'$-nek megfelelő konstansokat

$$\mathcal{D} \models \varphi(\bar{b}', \bar{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\bar{v}, \bar{x}) \in \mu(\bar{c}_b) \quad \Leftrightarrow \\ \varphi(\bar{v}, \bar{x}) \in \mu(\bar{c}_d) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{D} \models \varphi(\bar{d}', \bar{x})$$

mert C homogén μ-re és $\bar{b}', \bar{d}'$ monoton növő sorozatok. Ezért tehát $\mathcal{D} \models \Sigma_0$ és így $\mathcal{D}$ Σ-nak is modellje.

A 2.22 kompaktsági tétel szerint T'-nek van egy végtelen modellje, ezért a 2.32 tétel miatt e modell egy $|A|$-reguláris ultraszűrő szerinti ultrahatványa $|A|^+$-univerzális; legyen ez az ultrahatvány $\mathcal{A}'$. Ekkor $\mathcal{A}'$-nek az a reduktuma, melynek nyelvéből elhagyjuk a $\{b' : b \in B\}$ konstanshalmazt, továbbra is egy $|A|$-reguláris ultraszűrő szerinti ultrahatvány marad, ezért ez a reduktum is $|A|^+$-univerzális. Ugyanakkor e reduktum és $\langle \mathcal{A}, x \rangle_{x \in X}$ elemien ekvivalens ezért feltehetjük, hogy $\mathcal{A}$ elemi rész $\mathcal{A}'$ szóbanforgó reduktumában, és így persze $X \subseteq A'$ is teljesül (mellesleg ekkor X azonos lesz az x-ek $\mathcal{A}'$-beli interpretációinak halmazával). Végül minden $b \in B$-re azonosíthatjuk b-t és b' $\mathcal{A}'$-beli interpretáltját, ezért feltehetjük, hogy $B \subseteq A'$. Mivel $\mathcal{A}' \models T'$, ezért ekkor B megkülönböztethetetlen lesz $<$ szerint X felett. ∎

Feladat. Legyen $n \in \omega, n > 0$ rögzített. Bizonyítsuk be az előző tételt úgy is, hogy $B \subseteq {}^nA$ legyen megkülönböztethetetlen.

4.12. Tétel. *Legyen T olyan elmélet az L nyelven, melynek vannak végtelen modelljei, és legyen $|Form(L)| \leq \kappa$ tetszőleges végtelen számosság. Ekkor T-nek van olyan κ számosságú $\mathcal{A}$ modellje, melyre teljesül, hogy minden $Z \subseteq A$-ra*

$$|\{p \in S_1^{\mathcal{A}}(Z) : \ p \textit{ realizálható } \mathcal{A}\textit{-ban } \}| \leq |Z| + |Form(L)|.$$

Mivel Z elemeinek páronként különbözők a típusaik Z felett, ezért $\mathcal{A}$ annyira kevés típust realizál, amennyire csak lehet. Ráadásul ezt „egyszerre”, A minden Z részhalmazára igazolni kell.

Bizonyítás. Legyen T' a T elmélet skolemizáltja az L' nyelven, legyen $\langle B, < \rangle$ egy κ számosságú jólrendezett halmaz. Ekkor a 4.11 tétel szerint van T'-nek egy olyan $\mathcal{A}_0$ modellje, melyben B megkülönböztethetetlen $<$ szerint. Legyen $\mathcal{A}$ az $\mathcal{A}_0$-nak a B által generált részstruktúrája. Állítjuk, hogy ez az $\mathcal{A}$ megfelelő. Mivel T' Skolemizált, ezért elemei $\mathcal{A}_0$-ban mind ekvivalensek egy-egy alkalmas univerzális formulával és így az 1.11 és 1.16 tételek miatt $\mathcal{A}$ elemi része $\mathcal{A}_0$-nak, tehát $\mathcal{A} \models T$. Legyen most $Z \subseteq A$. Azt kell belátnunk, hogy $S_1^{\mathcal{A}}(Z)$ elemeiből legfeljebb $|Z| + |Form(L)|$ darab realizálható $\mathcal{A}$-ban.

Mivel $\mathcal{A}$-t B generálja, minden $z \in Z$-hez van egy L'-beli t term és van egy $\bar{b} \in B$ véges sorozat úgy, hogy $z = t^{\mathcal{A}}(\bar{b})$. Ezért ezeket a $\bar{b}$-ket összegyűjtve, van olyan $Y \subseteq B$, hogy $|Y| < |Z| + \aleph_0$ és Y generátuma tartalmazza Z-t. Ha $b \in B$, akkor a következő módon definiáljuk b Y-beli vetületét (ezt b'-vel jelöljük majd). Mivel $<$ jólrendezés B-n, ha Y-ban van b-nél nagyobb elem, akkor ezek között a felső korlátok között van legkisebb is. Legyen b' az a legkisebb elem Y-ban, melyre $b < b'$, ha van ilyen egyáltalán. Ha ilyen elem nincs Y-ban, akkor legyen $b' = \infty$. A $\bar{b} = \langle b_0, ..., b_{k-1}\rangle, \bar{c} = \langle c_0, ..., c_{k-1}\rangle$ sorozatokról azt mondjuk, hogy Y felett ekvivalensek, ha $b'_0 = c'_0, ..., b'_{k-1} = c'_{k-1}$.

Legyenek most $\bar{b}, \bar{c} \in B$ ekvivalens sorozatok Y felett. Ekkor

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{v},\bar{y}) \in tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}/Y) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi(\bar{b},\bar{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi^{<}((\bar{b}^\frown\bar{y})^{<}) \quad \overset{*}{\Leftrightarrow} \\ \mathcal{A} \models \varphi^{<}((\bar{c}^\frown\bar{y})^{<}) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi(\bar{c},\bar{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\bar{v},\bar{y}) \in tp^{\mathcal{A}}(\bar{c}/Y),\end{aligned}$$

A $(*)$ lépés két oldalán $\varphi^{<}$ ugyanaz a formula, mert $\bar{b}$ és $\bar{c}$ Y felett ekvivalens sorozatok. Ez a számolás azt mutatja, hogy B-beli ekvivalens sorozatok Y feletti típusai azonosak.

Most azt mutatjuk meg, hogy ha t az L' nyelv egy termje, $\bar{b}, \bar{c}$ Y felett ekvivalens sorozatok, akkor $tp^{\mathcal{A}}(t(\bar{b})/Y) = tp^{\mathcal{A}}(t(\bar{c})/Y)$. Ez azért van így, mert $t(\bar{b})$ típusa „bele van csomagolva" $\bar{b}$ típusába. Precízebben, ha $\varphi(\bar{v}) \in tp^{\mathcal{A}}(t(\bar{b})/Y)$ akkor $\varphi(t(\bar{v})) \in tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}/Y)$, de ez az előző bekezdés miatt azzal ekvivalens, hogy $\varphi(t(\bar{v})) \in tp^{\mathcal{A}}(\bar{c}/Y)$ ami pontosan akkor teljesül, ha $\varphi(\bar{v}) \in tp^{\mathcal{A}}(t(\bar{c})/Y)$.

Végül le fogjuk számolni, hány különböző Z feletti 1-típus realizálható $\mathcal{A}$-ban. B generálja $\mathcal{A}$-t, ezért rögzíthetünk minden $a \in A$-hoz egy t_a termet és egy $\bar{b}_a \in B$-t úgy, hogy $a = t_a^{\mathcal{A}}(\bar{b}_a)$ teljesüljön. Legyen $x, w \in A$. Állítjuk, hogy ha

$$t_x = t_w \qquad \text{és} \qquad \bar{b}_x \ Y \text{ felett ekvivalens } \bar{b}_w\text{-al},$$

akkor $tp^{\mathcal{A}}(x/Z) = tp^{\mathcal{A}}(w/Z)$. Mivel $\bar{b}_x$ és $\bar{b}_w$ ekvivalensek, $tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}_x/Y) = tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}_w/Y)$. Emiatt $x = t_x^{\mathcal{A}}(\bar{b}_x)$ és $w = t_w^{\mathcal{A}}(\bar{b}_w) = t_x^{\mathcal{A}}(\bar{b}_w)$ Y feletti típusai is azonosak. Végül, ha $\bar{z} \in Z$, akkor vannak olyan $\bar{t}$ termek és $\bar{y} \in Y$ elemek, hogy $\bar{z} = \bar{t}(\bar{y})$ (ez utóbbi egyenlőséget koordinátánként értve). Emiatt

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{v},\bar{z}) \in tp^{\mathcal{A}}(x/Z) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(\bar{v},\bar{t}(\bar{y})) \in tp^{\mathcal{A}}(x/Y) \quad \Leftrightarrow \\ \varphi(\bar{v},\bar{t}(\bar{y})) \in tp^{\mathcal{A}}(w/Y) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(\bar{v},\bar{z}) \in tp^{\mathcal{A}}(w/Z)\end{aligned}$$

vagyis x és w típusa Z felett azonos. Hány különböző Z feletti 1-típust realizálhat A? Legfeljebb annyit, ahányféleképpen t_a-t és $\bar{b}_a$ Y feletti ekvivalenciaosztályát választhatjuk. t_a-ból legfeljebb $|Form(L')|$ féle lehet, de $|Form(L')| = |Form(L)|$, mert a Skolemizálás nem növeli egy nyelv formulahalmazának számosságát. Rögzített (mondjuk n) hosszúságú B-beli sorozatok pontosan akkor ekvivalensek Y felett, ha vetületeik azonosak, ezért az n husszú sorozatoknak legfeljebb $|Y \cup \{\infty\}|^n = |Y| \leq |Z| + \aleph_0$ különböző ekvivalenciaosztálya lehet, így (minden $n \in \omega$ sorozat-hosszuságot figyelembevéve) összesen legfeljebb $\aleph_0 \cdot |Z|$ darab Y feletti ekvivalenciasztály van. Tehát a $\langle t_a, \bar{b}\rangle$ párokat a második koordináták Y feletti ekvivalenciájának erejéig legfeljebb $|Z| + |Form(L)|$ módon választhatjuk. De az előbb láttuk, hogy eltérő Z feletti 1-típusokhoz olyan párok tartoznak, melyek első koordinátái különbözők, vagy második koordinátáik nem ekvivalensek Y felett, ezért az $\mathcal{A}$-ban realizálható különböző Z feletti 1-típusok száma valóban legfeljebb $|Z| + |Form(L)|$. $\blacksquare$

5. Megszámlálható Kategoricitás

Ebben a részben olyan elméleteket vizsgálunk, melyeknek „kevés” páronként nem izomorf megszámlálhatóan végtelen modelljük van.

5.1. Véletlen struktúrák: egy konkrét elmélet kategoricitása

A 2.8 fejezet 2.43 tétele utáni megjegyzésében azt állítottuk, hogy van olyan elmélet (egy véges nyelven), melynek minden $\mathcal{A}$ modelljében minden végtelen $\kappa \leq |A|$-ra és minden $Z \in [A]^\kappa$ halmazra teljesül, hogy

$$(*) \qquad |S_1^{\mathcal{A}}(Z)| = 2^\kappa.$$

Ezt az állítást ott nem bizonyítottuk. Most kiegyenlítjük adósságunkat, és azzal kezdjük, hogy megadunk egy ilyen elméletet. Álljon az L nyelv egy darab 2-változós relációszimbólumból, melyet jelöljünk E-vel. Minden $m, n \in \omega$-ra $\varphi_{n,m}$ legyen az a formula az L nyelven, hogy „akárhogyis veszünk páronként különböző $x_0, ..., x_{n-1}$ és $y_0, ..., y_{m-1}$ elemeket, van olyan z, mely különbözik $x_0, ..., x_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1}$ mindegyikétől, és E relációban van az összes x_i-vel, de nincs E relációban egyik y_j-vel sem”. (Feladat: írjuk fel a $\varphi_{2,3}$ formulát). Ezek után legyen T_R a következő elmélet.

5.1. Definíció.

$$T_R = \{\forall v \neg E(v,v),\ \forall vw(E(v,w) \Rightarrow E(w,v))\} \ \cup\ \{\varphi_{n,m} : n, m \in \omega\}.$$

T_R szerint E irreflexív, szimmetrikus, és minden $n, m \in \omega$-ra $\varphi_{n,m}$ teljesül E-re. T_R modelljei (ha vannak neki egyáltalán) tehát gráfok.

Ebben a részben a T_R elméletet vizsgáljuk. Sok más érdekes tulajdonsága mellett megmutatjuk, hogy $(*)$ teljesül rá. Első ránézésre talán az sem világos, hogy T_R egyáltalán konzisztens. Ezt többféle módon is igazolni fogjuk.

5.2. Tétel. *T_R konzisztens elmélet.*

Bizonyítás. Meg fogjuk adni T_R egy modelljét. Először azt figyeljük meg, hogy ha G egy tetszőleges gráf, akkor van olyan G' bővítése G-nek, hogy ha X, Y páronként diszjunkt és véges részhalmazai G csúcsainak, akkor G'-nek van olyan z csúcsa, mely minden X-beli csúccsal össze van kötve, és mely egyetlen Y-beli csúccsal sincs összekötve. Adott G-hez könnyű ilyen G'-t konstruálni: G csúcsainak páronként diszjunkt és véges X, Y részhalmazaihoz vegyünk fel egy-egy új csúcsot (tehát annyi új csúcs kell, ahány módon kiválaszthatjuk az X, Y párokat), G' álljon G csúcsaiból és az új csúcsokból. G csúcsain tartsuk meg a régi gráf-struktúrát, és az új csúcsokat csak a hozzájuk tartozó X-halmaz csúcsaival kössük össze. Ez a G' nyilván jó lesz.

Legyen most G_0 az a gráf, melynek egyetlen csúcsa van. Ha valamilyen $n \in \omega$-ra G_n már adott, akkor legyen $G_{n+1} = G'_n$. Ekkor $\langle G_n : n \in \omega \rangle$ gráfok egy növő lánca lesz, állítjuk, hogy a $G = \cup_{n\in\omega} G_n$ gráf modellje T_R-nek.

A reflexivitás és szimmetria univerzális formulákkal kifejezhető tulajdonságok, ezért az 1.19 tétel miatt láncok unióira ezek öröklődnek, ezért G is egy gráf. Legyen most $n, m \in \omega$ adott, meg kell mutatnunk, hogy $G \models \varphi_{n,m}$. Válasszunk tehát G csúcsai közül egy n-elemű X és egy m-elemű Y részhalmazt, melyek diszjunktak. Mivel ezek végesek, van olyan $k \in \omega$, hogy $X, Y \subseteq G_k$. Ekkor a konstrukció miatt $G \supseteq G_{k+1} = G'_k$-ben van olyan z pont, mely (G_{k+1}-ben) pontosan X elemeivel van összekötve, azaz $\varphi_{n,m}$ igaz G-ben. Ezért valóban $G \models T_R$. ∎

Most T_R konzisztenciájára mutatunk egy másik bizonyítást is.

Bizonyítás. Megint meg fogjuk adni T_R egy modelljét. Az alaphalmaz legyen ω. Körülírjuk, mely $i, j \in \omega$ számok vannak E relációban. Legyen $i' = min\{i, j\}$ és legyen $j' = max\{i, j\}$. Ha $i' = j'$, akkor i és j nincs E relációban; különben pontosan akkor vannak E relációban, ha j' kettes számrendszerbeli alakjában az i' helyiértéken „1” szerepel. Állítjuk, hogy az így definiált G gráf modellje T_R-nek.

Az világos, hogy E irreflexív és szimmetrikus reláció (a sorrendtől az nem függ, hogy i és j közül melyik nagyobb). Ahhoz, hogy $G \models T_R$, még azt kell igazolni, hogy akárhogyis veszünk két diszjunkt és véges részhalmazt ω-ból, lesz olyan szám, mely az egyik részhalmaz minden elemével össze van kötve, de a másik részhalmaz egyetlen elemével sincs összekötve. Legyenek X és Y diszjunkt és véges részhalmazai ω-nak, és képezzük azt a $0 - 1$ sorozatot, melyben „1” szerepel minden olyan pozícióban, melynek sorszáma X-beli, és „0” szerepel minden olyan pozícióban, melynek sorszáma Y-beli. Ezt megtehetjük $X \cap Y = \emptyset$ miatt. A ki nem töltött pozíciókba tetszés szerint írjunk 0-kat vagy 1-eket, és egészítsük ki még a sorozatunkat egy „1000...0” alakú kezdőszelettel úgy, hogy a sorozat által kettes számrendszerben kódolt z szám nagyobb legyen X és Y minden eleménél (X és Y véges, ezért van ilyen kezdőszelet). Ekkor a konstrukció szerint z össze van kötve X minden elemével, de nincs összekötve Y egyetlen elemével sem. Ezért $G \models T_R$. ∎

Most igazoljuk T_R modelljeinek Stone-tereire vonatkozó állításunkat.

5.3. Tétel. *Ha $\mathcal{A} \models T_R$, κ végtelen számosság és $Z \in [A]^\kappa$ akkor $|S_1^{\mathcal{A}}(Z)| = 2^\kappa$.*

Bizonyítás. Legyenek $\mathcal{A}, \kappa, Z$ adottak az állításnak megfelelően és legyen L a T_R nyelve. $S_1^{\mathcal{A}}(Z)$ elemei az L_Z nyelv formuláiból álló halmazok, κ végtelensége miatt ebből pontosan 2^κ darab van, ezért $|S_1^{\mathcal{A}}(Z)| \leq 2^\kappa$. Fordítva, legyen $X \subseteq Z$-re p_X a következő L_Z-beli formulahalmaz:

$$p_X = \{E(v, x) : x \in X\} \cup \{\neg E(v, y) : y \in Z - X\}.$$

Ha $p \subseteq p_X$ egy véges részhalmaz, akkor a p elemeinek konjunkciójából képzett formula azt mondja, hogy v össze van kötve bizonyos (véges sok!) X-beli elemekkel, és nincs összekötve bizonyos (szintén véges sok!) $Z - X$-beliekkel. Mivel $\mathcal{A} \models T_R$, ezért $\mathcal{A} \models \exists v \wedge p$, azaz p_X végesen realizálható $\mathcal{A}$-ban. Ezért kiterjeszthető egy $q_X \in S_1^{\mathcal{A}}(Z)$ típussá. Figyeljük meg, hogy ha $X_0 \neq X_1 \subseteq Z$, akkor van olyan $x \in Z$, mely X_0 és X_1 közül pontosan az egyikben van benne, ezért $p_{X_0} \neq p_{X_1}$ és így $q_{X_0} \neq q_{X_1}$ teljesül. Másképp fogalmazva: a $\mathcal{P}(Z) \ni X \mapsto q_X$ leképezés injektív. Ezek szerint a $Q = \{q_X : X \subseteq Z\}$ halmazra egyrészt $|Q| = |\mathcal{P}(Z)| = 2^\kappa$ másrészt $Q \subseteq S_1^{\mathcal{A}}(Z)$. Ezért $|S_1^{\mathcal{A}}(Z)| \geq 2^\kappa$. ∎

A T_R konzisztenciájára adott két bizonyításban egyébként izomorf gráfokat konstruáltunk, sőt, ezekkel nem izomorf megszámlálható gráf nem is lehet T_R modellje. Ezt a meglepő állítást igazoljuk az alábbiakban.

5.4. Definíció. *Legyen κ számosság és T egy elmélet. Azt mondjuk, hogy T κ-kategorikus, ha T-nek a κ számosságú modelljei mind izomorfak egymással.*

5.5. Tétel. *(Łoś–Vaught teszt). Ha az L nyelv T elméletének csak végtelen modelljei vannak és T kategorikus egy $\kappa \geq |Form(L)|$ számosságon, akkor T teljes.*

Bizonyítás. Ha az állítás nem lenne igaz, akkor lenne olyan φ formula, melyre $T \cup \{\varphi\}$-nek és $T \cup \{\neg\varphi\}$-nek is lennének modelljei; legyenek ezek rendre $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$. Ezek végtelenek, mert T-nek csak ilyen modelljei vannak. Az 1.16 leszálló és a 2.30 felszálló Löwenheim-Skolem tételeket alkalmazva, vannak κ számosságú $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$ modellek, melyek rendre elemien ekvivalensek $\mathcal{A}$-val illetve $\mathcal{B}$-vel. Ezért ezek egyúttal T-nek is modelljei, tehát T κ-kategoricitása miatt $\mathcal{A}' \cong \mathcal{B}'$. Ez azonban lehetetlen, mert $\mathcal{A}' \models \varphi$ és $\mathcal{B}' \models \neg\varphi$. Ez az ellentmondás igazolja az állítást. ∎

Feladat. Adjunk meg teljes, de nem $\aleph_0$-kategorikus elméleteket. (Ezt minden további előismeret nélkül meg lehet oldani, ha így mégis nehéz lenne a feladat, akkor nézzük át teljesen ezt a fejezetet, majd térjünk vissza erre a kérdésre.)

5.6. Tétel.

(1) Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két megszámlálható modellje T_R-nek és $f : A \to B$ olyan függvény, melyre $dom(f)$ véges halmaz és f egy izomorfizmus értelmezési tartománya és értékkészlete között, akkor van olyan $g : A \to B$ izomorfizmus, mely kiterjeszti f-t.

(2) T_R egy $\aleph_0$-kategorikus elmélet.

Bizonyítás. Legyen $A = \{a_n : n \in \omega\}$ és legyen $B = \{b_n : n \in \omega\}$. Legyen $f_0 = f$ és tegyük fel, hogy megadtuk már a véges f_n függvényt, mely izomorfizmus az értelmezési tartománya és értékkészlete által feszített részgráfok (vagy ami ugyanaz: generált részstruktúrák) között. legyen $a_m \in A$ a legkisebb indexű elem, mely még nincs $dom(f_n)$-ben. Legyen $X = \{a \in dom(f_n) : \mathcal{A} \models E(a_m, a)\}$ és legyen

$Y = dom(f_n) - X$. Ekkor $dom(f_n)$-re nézve igaz, hogy a_m pontosan az X-beli csúcsokkal van összekötve. Mivel f_n injektív, az $f_n[X]$ és $f_n[Y]$ halmazok diszjunktak, ezért $\mathcal{B} \models T_R$ miatt van olyan $b \in B - range(f_n)$, mely $f_n[X]$ minden elemével össze van kötve, de $f_n[Y]$ egyik elemével sincs összekötve. Terjesszük ki f_n-t úgy, hogy a_m-et b-re képezze. Ez az f' kiterkesztés szintén egy véges izomorfizmus lesz, e bekezdés eleje szerint inverze kiterjeszthető úgy, hogy f'^{-1} értelmezve legyen B-nek $range(f_n)$-ből kimaradó első elemére. Ez az újabb kiterjesztés legyen f_{n+1}. Végül $f = \cup_{n\in\omega} f_n$ lesz a keresett izomorfizmus.

(2) igazolásához legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két megszámlálható modellje T_R-nek. Ekkor az $f = \emptyset$ sehol sem értelmezett függvényre (1)-et alkalmazva kapunk egy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közti izomorfizmust. ∎

A T_R konzisztenciájára vonatkozó 5.2 tétel első bizonyítása alapján azt gondolhatnánk, hogy egyetlen $\varphi_{n,m}$ formulának sem lehetnek véges modelljei, mert ha egy ilyen modellt lépésenként akarnánk felépíteni, akkor minden egyes „feladat megoldásakor” (azaz új csúcs hozzávételénél) újabb feladatok adódnak, nevezetesen az olyan részhalmazokra is garantálni kell $\varphi_{n,m}$ igazságát, amit újonan vettünk fel. Ez a szemlélet csalóka: valójában mindegyik $\varphi_{n,m}$-nek van véges modellje.

Hogy ezt igazolhassuk, a véletlen gráfok elméletét hívjuk segítségül. Legyen V egy alaphalmaz, a V-beli párokra külön-külön, egymástól függetlenül, egy véletlen kísérlettel döntjük el, van-e él a párt alkotó csúcsok között. Kicsit precízebben: minden $\{x, y\} \in [V]^2$-re legyen $\xi_{x,y}$ egy olyan valószínűségi változó, mely a 0 és 1 értékeket egyaránt 1/2 valószínűséggel veszi fel és tegyük fel, hogy a $\langle \xi_{x,y} : \{x, y\} \in [V]^2 \rangle$ rendszer teljesen független. Figyeljük meg e valószínűségi változók értékeit, és x-t pontosan akkor kössük y-al össze, ha $\xi_{x,y} = 1$. Az eredményül kapott gráf persze függ a véletlentől. Az így „konstruált” gráfokat nevezzük majd véletlen gráfoknak. Szigorúan véve címkézett gráfokról kéne beszélnünk, mert a csúcsok V halmazának elemeit megneveztük, és különbözőnek tekintünk például két olyan 3 csúcsú (egyébként nyilván izomorf) gráfot, melyekben 1-1 él van összesen, de ezek az élek V más-más elemei között mennek a két gráfban.

A véletlen gráfokat másképp is elképzelhetjük: rajzoljuk le a V csúcsain megadható összes gráfot, ezeket tegyük egy kalapba, és véletlenül választva húzzunk ki egyet. Ez és az előző modell azonos: ha V véges, akkor mindkét esetben $1/2^{|[V]^2|}$ valószínűséggel kapunk meg egy konkrét gráfot. Ennek megfelelően, mindkét modellt használni fogjuk, attól függően, hogy adott pillanatban melyiket egyszerűbb átlátni.

Valószínűségszámítási terminológiát használva az elemi események a konkrét gráfok, események gráfok (mérhető) halmazai. Ha φ egy elsőrendű formula, akkor $P(G_n \models \varphi)$-vel jelöljük a φ $n = \{0, 1, ..., n-1\}$ alaphalmazon vett modellhalmazának, mint eseménynek a valószínűségét.

5.7. Tétel. *Legyen $n, m \in \omega$ rögzített. Ekkor*

$$\lim_{k\to\infty} P(G_k \not\models \varphi_{n,m}) = 0.$$

Bizonyítás. Diszjunkt $X \in [k]^n$-re és $Y \in [k]^m$-re valamint $z \in k$-ra álljanak az $E_{X,Y,z}$ események azokból a gráfokból, melyekre nem teljesül, hogy „z össze van kötve X minden elemével, de z nincs összekötve Y egyetlen elemével sem". Ekkor $P(E_{X,Y,z}) = 1 - 1/2^{n+m}$. Legyen $\delta = 1/2^{n+m}$. Legyen $E_{X,Y}$ az az esemény, hogy „$G_k - (X \cup Y)$-ban nincs olyan z csúcs, mely X minden elemével össze van kötve, de Y egyik elemével sincs összekötve". Mivel különböző z-kre az $E_{X,Y,z}$ események függetlenek, ezért $P(E_{X,Y}) = (1-\delta)^{k-n-m}$. Végül az $E = \{G : G$ egy gráf k-n és $G \not\models \varphi_{n,m}\}$ eseményre $E = \cup_{X,Y} E_{X,Y}$, ezért

$$(*) \qquad 0 \leq P(G_k \not\models \varphi_{n,m}) \quad \leq \quad k^{n+m}(1-\delta)^{k-n-m},$$

mert a diszjunkt X és Y halmazokat legfeljebb k^{n+m} féleképpen választhatjuk (rakjuk k elemeit sorba, az első n elemből álljon X, a következő m elemből Y - láthatjuk, hogy a k^{n+m} egy elég nagyvonalú felső becslés a lehetőségek számára).

$(*)$ jobboldalán az első tényező k-nak $n+m$-edfokú polinomja, a másik tényező $\delta > 0$ miatt egy 1-nél kisebb alapú exponenciális kifejezés k-ban, ezért (például a L'Hospital szabályt $n+m$-szer alkalmazva) kapjuk, hogy $k \to \infty$ esetén $(*)$ jobboldala és ezzel együtt baloldala is 0-hoz konvergál, ahogy állítottuk. ∎

5.8. Tétel. *T_R véges Σ részhalmazainak van véges modellje, sőt,*

$$\lim_{k\to\infty} P(G_k \models \Sigma) = 1.$$

Bizonyítás. Legyen $\Sigma \in [T_R]^{<\omega}$, természetesen egy véges véletlen gráf lesz Σ modellje. Ezekben E irreflexív és szimmetrikus, ezért csak a $\varphi_{n,m}$ alakú Σ-beli formulákkal kell foglalkoznunk. Legyen tehát Σ ilyen alakú formuláinak halmaza $\{\phi_0, ..., \phi_{m-1}\}$. Ekkor $P(G_k \not\models \Sigma) \leq P(G_k \not\models \phi_0) + ... + P(G_k \not\models \phi_{m-1})$, és itt a rögzített m számú összeadandó az 5.7 tétel miatt nullához tart. A komplementum eseményre áttérve adódik az állítás második fele.

Azt kaptuk tehát, hogy elég nagy (de persze véges) k-ra pozitív annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott gráf modellje Σ-nak. Ezért elég nagy (de véges k-ra) van Σ-nak k-elemű modellje.

Valójában annak valószínűsége, hogy egy véletlenül választott gráf modellje Σ-nak, nem csak, hogy pozitív, hanem 1-hez konvergál; ennek megfelelően nemcsak, hogy van Σ-nak k elemű modellje, hanem „majdnem minden" gráf ilyen, ha k elég nagy. ∎

Természetesen az előző tételből és a kompaktsági tételből is következik, hogy T_R-nek van modellje. Az előző tételnek van egy további érdekes következménye.

5.9. Tétel. *(0-1 törvény). Legyen φ tetszőleges formula a gráfelmélet nyelvén. Ekkor a $\lim_{k\to\infty} P(G_k \models \varphi)$ határérték létezik, és vagy 0-val vagy 1-el egyenlő.*

Ezek szerint egy elsőrendű formula vagy majdnem minden véges gráfban igaz, vagy majdnem mindegyikben hamis.

Bizonyítás. Legyen φ elsőrendű formula. Az 5.6 tétel miatt T_R $\aleph_0$-kategorikus, ezért az 5.5 tétel miatt teljes is. Tehát vagy $T_R \models \varphi$ vagy $T_R \models \neg\varphi$.

Tegyük fel először, hogy $T_R \models \varphi$. A kompaktsági tétel miatt ekkor van T_R-nek egy olyan véges Σ része, melyből szintén következik φ. Valószínűségszámítási szóhasználattal ez azt jelenti, hogy az $E_k = \{G : G\ k\text{-elemű és } G \models \Sigma\}$ esemény részhalmaza az $F_k = \{G : G\ k\text{-elemű és } G \models \varphi\}$-nek. Ezek szerint $P(E_k) \leq P(F_k)$. Viszont az 5.8 tétel miatt $\lim_{k\to\infty} P(E_k) = \lim_{k\to\infty} P(G_k \models \Sigma) = 1$, ezért $1 \geq P(F_k)$ miatt a rendőr elv szerint állításunk ebben az esetben igaz.

Ha $T_R \models \neg\varphi$, akkor az előzőek szerint $\lim_{k\to\infty}(G_k \models \neg\varphi) = 1$ és így $\lim_{k\to\infty} P(G_k \models \varphi) = \lim_{k\to\infty} 1 - P(G_k \models \neg\varphi) = 0$, ahogy állítottuk. ∎

A 0-1 tételek érvényben maradnak bonyolultabb elsőrendű nyelvekre is, melyek nem tartalmaznak konstans- és függvényszimbólumokat. Ezeket az eseteket jelölési komplikációk árán az eddigi gondolatokkal könnyen kezelhetjük, ezért nem adjuk meg a részleteket. A területtől egy példával búcsuzunk, mely szerint a 0-1 törvény nem marad érvényben, ha nyelvünk tartalmaz egy 1-változós függvényszimbólumot.

Álljon az L nyelv egyetlen f-el jelölt függvényszimbólumból. Az L nyelv $k \in \omega$ elemű modelljeit izomorfizmus erejéig megadhatjuk például f művelettáblájával. Rögzített $k \in \omega$-ra az L nyelv egy k elemű véletlen struktúráján azt értjük, hogy e művelettáblákból húzunk egyet a képzeletbeli kalapunkból. Egy ilyen véletlenül választott struktúrát $\mathcal{A}_k$-val fogunk jelölni.

Legyen most φ az a formula, hogy f-nek nincs fixpontja, azaz $\varphi = \forall v(f(v) \neq v)$. Rögzített k-ra $P(\mathcal{A}_k \models \varphi) = (k-1)^k/k^k$, ugyanis az összes lehetőségek száma k^k (ennyiféleképpen választhatunk egy függvényt egy k elemű halmazon), a kedvező lehetőségek száma pedig $(k-1)^k$, mert egy φ-nek megfelelő f értékei egy adott $i \in k$-ra a $k - \{i\}$ halmazból kerülhetnek ki; ezek a halmazok $k-1$ eleműek.

Ezek után figyeljük meg, hogy

$$\lim_{k\to\infty} P(\mathcal{A}_k \models \varphi) = \lim_{k\to\infty}((k-1)/k)^k = \lim_{k\to\infty}(1-1/k)^k = e^{-1}.$$

Ez a határérték is létezik tehát, de nem 0, se nem 1.

Feladatok.

1. Legyen G_ω az a véletlen gráf, melynek ω az alaphalmaza. Igazoljuk, hogy minden $\varphi \in T_R$-re $P(G_\omega \models \varphi) = 1$.
2. Igazoljuk, hogy $P(G_\omega \models T_R) = 1$.

3. Igazoljuk, hogy ha kétszer választunk egy-egy véletlen gráfot ω-n, akkor ezek 1 valószínűséggel izomorfak lesznek.

A 3. feladat miatt ω-n szokás „a véletlen gráfról" beszélni („egy véletlen gráf" helyett). Az ω-n vett véletlen gráfot Rado-gráfnak is szokás nevezni. A 2. feladat és T_R $\aleph_0$-kategoricitása miatt a véletlen gráf izomorf az 5.2 tétel bizonyításaiban konstruált gráfokkal.

A véletlen gráfok tanulmányozását Richard Rado, Erdős Pál és Rényi Alfréd kezdeményezték; T_R alsó indexében az R Rado-ra utal.

Feladatok. 4. Igazoljuk, hogy a Rado-gráfba minden véges gráf beágyazható.
5. Igazoljuk, hogy a Rado-gráfba minden megszámlálhatóan végtelen gráf beágyazható.

5.2. $\aleph_0$-kategorikus elméletek jellemzései

Először arra gondolhatnánk, hogy az $\aleph_0$-kategorikus elméleteknek azért van kevés megszámlálható modellje, mert az elmélet „mereven és egyértelműen megszabja", hogy a struktúra relációinak és függvényeinek hogyan kell kinéznie az elemeken, és ezért egy $\aleph_0$-kategorikus elmélet modellje nagyon kevéssé szimmetrikus, mert minden részlet előre le van rögzítve az elmélet által.

Eddigi példánk, a T_R elmélet azonban óvatosságra int. Legyen $\mathcal{C}$ a T_R megszámlálható modellje, legyen $n \in \omega$ rögzített, és legyen $\bar{a}, \bar{b} \in {}^nC$ két olyan sorozat, melyek izomorf részgráfokat feszítenek. Ekkor az 5.6 tételt $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$-vel és azzal a véges f függvénnyel alkalmazva, mely $\bar{a}$-t $\bar{b}$-re képezi, kapjuk, hogy $\mathcal{C}$-nek van $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be vivő automorfizmusa. Mivel n elem csak véges sok páronként nem izomorf részgráfot feszíthet, azt kaptuk, hogy $\mathcal{C}$ automorfizmuscsoportja igen nagy kell, hogy legyen. Látni fogjuk, hogy ez általában is így van: az első bekezdésben leírtakkal ellentétben, egy $\aleph_0$-kategorikus elmélet megszámlálható modelljei nagyon szimmetrikusak (azaz nagy az automorfizmus-csoportjuk).

Valójában attól lesz egy elmélet $\aleph_0$-kategorikus, hogy a modelljei „szinte semelyik részét nem köti meg", ezért akárhogyis próbálkozunk a modell-konstrukcióval, végül a nagy szimmetria miatt izomorf struktúrákat kapunk, függetlenül attól, milyen módon fogtunk hozzá a modellünk felépítéséhez.

Ebben a fejezetben megadjuk az $\aleph_0$-kategorikus elméletek néhány jellemzését. A fejezet végéig rögzítünk egy L megszámlálható nyelvet. A vizsgált T elmélet mindig L-beli lesz.

Először a Stone-terek méretével jellemezzük az $\aleph_0$-kategorikus elméleteket.

5.10. Tétel. *(Ryll-Nardzewski.) Egy teljes T elmélet akkor és csak akkor $\aleph_0$-kategorikus, ha minden $n \in \omega$-ra $S_n(T)$ véges.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy T $\aleph_0$-kategorikus, és legyen $\mathcal{A}$ (az izomorfizmus erejéig egyértelmű) megszámlálhatóan végtelen modellje T-nek. Rögzítsük n-t is. Ha $p \in S_n(T)$, akkor p realizálható T-nek egy $\aleph_0$-szaturált modelljében, a realizáció a leszálló Löwenheim-Skolem tétel miatt egy megszámlálhatóan végtelen elemi részben van. Ez az elemi rész T $\aleph_0$-kategoricitása miatt izomorf $\mathcal{A}$-val, és ebben az elemi részben is nyilván realizálható p. Azt kaptuk, hogy $S_n(T)$ minden eleme realizálható $\mathcal{A}$-ban. Állítjuk, hogy $S_n(T)$ minden eleme izolált. Ez azért van így, mert ha $p \in S_n(T)$ nem-izolált típus lenne, akkor a 4.4 tétel miatt p elkerülhető lenne T egy megszámlálható modelljével. Ez a modell viszont nem lenne izomorf $\mathcal{A}$-val (hisz ebben $S_n(T)$ minden eleme realizálható). Ez ellentmond T $\aleph_0$-kategoricitásának.

Vegyük most figyelembe, hogy $S_n(T)$ kompakt tér, ezért minden végtelen részhalmazának van torlódási pontja. Ha tehát $S_n(T)$ végtelen lenne, akkor lenne torlódási pontja, ez a pont nem lenne izolált. Ezért $S_n(T)$ valóban véges.

Fordítva, most azt tegyük fel, hogy $S_n(T)$ minden $n \in \omega$-ra véges. Ekkor persze mindegyik $S_n(T)$ tér diszkrét, azaz minden pontjuk izolált. Legyen most $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két megszámlálható modellje T-nek. Ekkor $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ T-nek csak izolált típusait realizálják, hisz T-nek nincs is másfajta típusa. T teljessége miatt tehát $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ elemien ekvivalens megszámlálható és atomos modellek, ezért a 4.9 tétel miatt izomorfak is. Ez pedig pont azt jelenti, hogy T $\aleph_0$-kategorikus. ∎

Most az automorfizmus-csoportokkal jellemezzük az $\aleph_0$-kategorikus elméleteket.

5.11. Definíció. *Legyen G permutációcsoport az X halmazon, és legyen $n \in \omega$. Definiáljuk G hatását ${}^nX$-n:*

$$\text{ha } \bar{a} = \langle a_0, ..., a_{n-1}\rangle \in {}^nX, \text{ akkor } g(\bar{a}) = \langle g(a_0), ..., g(a_{n-1})\rangle.$$

Emlékeztetünk rá, hogy ha G egy csoport, mely hat egy Y halmazon, akkor Y elemei között az a reláció, hogy G egy alkalmas eleme az egyiket a másikba viszi, egy ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályokat G Y-beli pályáinak nevezzük.

5.12. Definíció. *Legyen G permutációcsoport az X halmazon. G-t oligomorfnak nevezzük, ha minden $n \in \omega$-ra G-nek ${}^nX$-en csak véges sok pályája van.*

5.13. Tétel. *(Svenonius.) Legyen $\mathcal{A}$ megszámlálhatóan végtelen L-struktúra. $Th(\mathcal{A})$ akkor és csak akkor $\aleph_0$-kategorikus, ha $Aut(\mathcal{A})$ (azaz $\mathcal{A}$ automorfizmuscsoportja) egy oligomorf permutációcsoport A-n. Két sorozat akkor és csak akkor van azonos pályán, ha $\emptyset$ feletti típusaik megegyeznek.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $Aut(\mathcal{A})$ egy oligomorf permutációcsoport. Legyen $n \in \omega$ rögzített. Ha $\bar{a}, \bar{b} \in {}^nA$ egy pályán van $Aut(\mathcal{A})$ szerint, akkor van $\mathcal{A}$-nak egy f automorfizmusa, mely $\bar{a}$-t $\bar{b}$-re viszi. Ekkor $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/\emptyset) = tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}/\emptyset)$ mert az 1.9 tétel szerint az automorfizmusok megőrzik a formulák igazságát. Ez azt jelenti, hogy (T-vel jelölve $Th(\mathcal{A})$-t) $S_n(T)$-nek legfeljebb annyi eleme lehet, ahány pályája van $Aut(\mathcal{A})$-nak ${}^nA$-n. Mivel $Aut(\mathcal{A})$ oligomorf, ezért mindegyik $S_n(T)$ véges, és így az 5.10 tétel miatt T valóban $\aleph_0$-kategorikus.

Fordítva, most azt tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ elmélete $\aleph_0$-kategorikus. Legyen $n \in \omega$, ekkor az 5.10 tétel miatt $S_n(T)$ véges. Legyenek $\bar{a}, \bar{b} \in {}^nA$ olyanok, hogy $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/\emptyset) = tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}/\emptyset)$. Elég igazolni, hogy ekkor $\bar{a}$ és $\bar{b}$ egy pályán vannak $Aut(\mathcal{A})$ szerint, mert ekkor legfeljebb $|S_n(T)|$ darab pálya van.

Az $\mathcal{A}' = \langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$ és a $\mathcal{B}' = \langle \mathcal{A}, \bar{b} \rangle$ elemien ekvivalens struktúrák, mert $\bar{a}$ és $\bar{b}$ $\mathcal{A}$-beli típusa azonos. Továbbá a $T' = Th(\mathcal{A}') = Th(\mathcal{B}')$ elméletek $\aleph_0$-kategorikusak, hisz minden $m \in \omega$-ra feleltessük meg $p \in S_m(T')$-nek azt a $p^* \in S_{n+m}(T)$ típust, melyet úgy kapunk, hogy p formuláiban $\bar{a}$-t változókra cserléljük. Ez a megfeleltetés injektív, ezért $|S_m(T')| \leq |S_{m+n}(T)|$, ami minden m-re véges. Tehát az 5.10 tétel miatt T' valóban $\aleph_0$-kategorikus. Azt kaptuk, hogy $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$ megszámlálhatóan végtelen elemien ekvivalens struktúrák, és közös elméletük $\aleph_0$-kategorikus. Ezért van köztük egy f izomorfizmus. Ez az izomorfizmus $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be viszi, tehát ez az f $\mathcal{A}$ keresett automorfizmusa. ∎

Azt fogjuk mondani, hogy $\mathcal{A}$ $\aleph_0$-kategorikus struktúra, ha $Th(\mathcal{A})$ $\aleph_0$-kategorikus elmélet.

Feladatok. 1. Legyen $\mathcal{A}$ egy megszámlálhatóan végtelen $\aleph_0$-kategorikus struktúra, és $R \subseteq {}^nA$. Ekkor R akkor és csak akkor definiálható $\mathcal{A}$-ban (paraméterek nélkül), ha R előáll $Aut(\mathcal{A})$ véges sok pályájának uniójaként.
2. Legyen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ két $\aleph_0$-kategorikus struktúra, melyek univerzuma ugyanaz a megszámlálhatóan végtelen halmaz. Igazoljuk, hogy ha $Aut(\mathcal{A}) = Aut(\mathcal{B})$, akkor a két struktúrában pontosan ugyanazok a relációk definiálhatók paraméterek nélkül (sőt, paraméterekkel is).

Foglaljuk össze és egészítsük ki eddigi eredményeinket. Továbbra is, a φ és ϕ formulákról azt mondjuk, hogy T szerint ekvivalensek, ha $T \models \varphi \Leftrightarrow \phi$, és F_n-el jelöljük azoknak a formuláknak a halmazát, melyekben legfeljebb $v_0, ..., v_{n-1}$ fordul elő szabadon.

5.14. Tétel. *Legyen T teljes elmélet az L nyelven. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

(1) T $\aleph_0$-kategorikus.

(2) Minden $n \in \omega$-ra $S_n(T)$ véges.

(3) T minden megszámlálhatóan végtelen modellje atomos.

(4) T minden megszámlálhatóan végtelen modelljének az automorfizmus-csoportja oligomorf.

(5) Minden $n \in \omega$-ra $F_n(L)$-ben csak véges sok, T szerint páronként nem ekvivalens formula van.

Bizonyítás. Az 5.10 tétel szerint (1) és (2) ekvivalens. Ha T-re (3) teljesül, akkor a 4.9 tétel miatt T-re (1) is teljesül. Fordítva, ha T-re teljesül (1), akkor megmutatjuk, hogy (3) is fennáll. (1) miatt persze (2) is igaz T-re, és ezért $S_n(T)$ végessége miatt minden típus izolált. De ekkor a 4.8 tétel miatt T-nek van megszámlálható atomos modellje. Ismét használva (1)-et, adódik, hogy T minden megszámlálhatóan végtelen modellje is atomos, vagyis (3) teljesül.

(1)-ből (4) is következik: ha $\mathcal{A} \models T$, akkor az 5.13 tétel miatt $Aut(\mathcal{A})$ oligomorf. Ha (4) teljesül T-re, akkor szintén az 5.13 tétel miatt minden megszámlálható modelljének $\aleph_0$-kategorikus az elmélete, de T teljessége miatt ezek az $\aleph_0$-kategorikus elméletek mind T-vel egyenlők.

Végül tegyük fel (5)-öt. Ha $p \in S_n(T)$, $\varphi \in p$ és ϕ ekvivalens φ-vel, akkor persze $\phi \in p$ is teljesül. Ezért, ha F_n-ben csak véges sok páronként T szerint nem ekvivalens formula van, akkor mindegyik $S_n(T)$ véges, és így (2) teljesül. Fordítva, tegyük fel, hogy (2) igaz T-re. Azt állítjuk, hogy ha φ és ϕ T szerint nem ekvivalensek, akkor $N_\varphi \neq N_\phi$. Ez azért van így, mert ha φ és ϕ T szerint nem ekvivalensek, akkor van T-nek egy olyan modellje, amiben egy alkalmas sorozat ϕ és φ közül pontosan egyiküket realizálja, ennek a sorozatnak az üreshalmaz feletti p típusa olyan, mely N_φ és N_ϕ közül pontosan az egyikben van benne. Ezek szerint tehát a $\varphi \mapsto N_\varphi$ leképezés T szerint nem ekvivalens formulákon különböző eredményeket vesz fel, tehát páronként inekvivalens F_n-beli formulákból legfeljebb $2^{|S_n(T)|}$ darab lehet, de (2) miatt az utóbbi mennyiség véges. ∎

5.15. Definíció. *Az $\mathcal{A}$ struktúra lokálisan véges, ha végesen generált részstruktúrái végesek. $\mathcal{A}$ egyenletesen lokálisan véges, ha van olyan $f : \omega \to \omega$ függvény, hogy $\mathcal{A}$ $k \in \omega$ elemmel generált részstruktúrái legfeljebb $f(k)$ eleműek.*

Feladat 1. Adjunk meg egy lokálisan véges struktúrát, mely nem egyenletesen lokálisan véges. (Útmutatás: legyen G_n a 2^n-dik egységgyökök multiplikatív csoportja és vizsgáljuk $\cup_{n\in\omega} G_n$-t.)

5.16. Tétel. *Ha $\mathcal{A}$ egy $\aleph_0$-kategorikus struktúra, akkor $\mathcal{A}$ egyenletesen lokálisan véges.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{A}$ véges, akkor az állítás semmitmondó, ezért tegyük fel, hogy A végtelen halmaz. $\mathcal{A}$ minden véges részhalmaza benne van $\mathcal{A}$ egy megszámlálható elemi részében, ez az elemi rész az $\aleph_0$-kategoricitás miatt izomorfizmus erejéig egyértelmű, ezért áttérve $\mathcal{A}$ egy megszámlálhatóan végtelen elemi részére, feltehetjük, hogy $|A| = \aleph_0$.

Legyen most $n \in \omega$ és $\bar{a} \in {}^nA$. Figyeljük meg, hogy $\bar{a}$ generátumában minden elem egyenlő egy term $\bar{a}$ (egy részén) felvett értékével, és ezek a termek eltérő elemekre nyilván különbözők. Ezért a generátum elemeinek $\bar{a}$ feletti típusai páronként különbözők. De $\mathcal{A}$-ban $\bar{a}$ felett legfeljebb annyi különböző 1-típus van, ahány különböző $n+1$ típus van $\emptyset$ felett. Ezek száma viszont az 5.10 tétel miatt véges. Tehát $\bar{a}$ generátuma véges, mondjuk $g_{\bar{a}}$ elemű. Most vegyük észre, hogy ha $\bar{a}$ és

$\bar{a}'$ egy pályán vannak $Aut(\mathcal{A})$ szerint, akkor generátumuk izomorf: $\mathcal{A}$-nak $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be vivő automorfizmusai izomorfizmusok a generátumok között. Tehát ekkor $g_{\bar{a}} = g_{\bar{a}'}$. Ezek után ${}^nA$ véges sok pályájából vegyünk 1-1 $\bar{a}_0, ..., \bar{a}_{m-1}$ reprezentánst és legyen $f(n) = max\{g_{\bar{a}_i} : i < m\}$. Világos, hogy ekkor n elem legfeljebb $f(n)$ elemű részt generál. ∎

Feladatok. 1. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ $\aleph_0$-kategorikus L-struktúrák, akkor direktszorzatuk is $\aleph_0$-kategorikus.

2. Legyen L olyan nyelv, melyben nincsenek függvényszimbólumok. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{A}$ $\aleph_0$-kategorikus L-struktúra és $\mathcal{B}$ olyan megszámlálható L-struktúra, melynek minden véges része beágyazható $\mathcal{A}$-ba, akkor az egész $\mathcal{B}$ beágyazható $\mathcal{A}$-ba.

6. Stabilitáselmélet

Az $\aleph_0$-kategorikus elméletek 5.-dik fejezetben adott jellemzései után természetes kérdés, hogy mit mondhatunk a nagyobb számosságokon kategorikus elméletekről. A stabilitáselmélet e kérdés kapcsán, Morley és később Shelah, Hrushovski, Pillay, Lascar, Zilber és Baldwin munkássága nyomán mára a matematikai logika szinte önálló fejezetévé vált.

E fejezetben egyik fő célunk, hogy bebizonyítsuk Morley tételét: egy megszámlálható nyelven adott T elmélet akkor és csak akkor $\aleph_1$-kategorikus, ha minden $\kappa > \aleph_0$ számosságra κ-kategorikus. Az e tétel igazolásához szükséges apparátust aztán más modellelméleti és modellelméleten kívüli (elsősorban testekkel kapcsolatos, algebrai) problémák visgálatára is fel fogjuk használni. A modellelméleti alkalmazások közül kiemeljük a kategorikus elméletek axiomatizálására és modelljeik finomszerkezetére vonatkozó, a 6.4 alfejezetben ismertetett eredményeket.

Vizsgálatainkat a stabilitás fogalmának bevezetésével kezdjük.

6.1. Stabil elméletek és alaptulajdonságaik

Az 5.10 tétel szerint egy elmélet akkor és csak akkor $\aleph_0$-kategorikus, ha véges dimenziós Stone-terei mind végesek. Ez utóbbi tulajdonság „végtelen megfelelőit” írja le a következő definíció.

6.1. Definíció. *Legyen T konzisztens elmélet és legyen λ végtelen számosság. Ekkor*

- *T λ-stabil, ha minden $\mathcal{A} \models T$-re és $X \in [A]^\lambda$-ra $|S_1^{\mathcal{A}}(X)| \leq \lambda$;*
- *T stabil, ha van olyan végtelen λ számosság, melyre T λ-stabil;*
- *T szuperstabil, ha van olyan μ végtelen számosság, hogy minden $\lambda \geq \mu$-re T λ-stabil;*
- *T instabil, ha nem stabil.*

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy milyen tulajdonságai vannak a stabil, illetve instabil elméleteknek. Azzal kezdjük, hogy megmutatjuk: a Stone-terek dimenziója nem lényeges.

6.2. Tétel. *Legyen T egy elmélet, legyen λ végtelen számosság és legyen $n \in \omega$, $n > 0$. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.*

(1) *Van olyan $\mathcal{A} \models T$ és $X \in [A]^\lambda$ melyre $|S_n^{\mathcal{A}}(X)| > \lambda$.*

(2) *Van olyan $\mathcal{C} \models T$ és $Y \in [C]^\lambda$ melyre $|S_1^{\mathcal{C}}(Y)| > \lambda$.*

Bizonyítás. (2) $\Rightarrow$ (1) igazolása egyszerű: legyen $\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}$ egy λ^+-szaturált elemi bővítése (ilyen van a 2.48, 2.53 és 2.44 (2) tételek miatt) és tegyük fel, hogy (2) igaz. Ekkor minden $p \in S_1^{\mathcal{C}}(Y)$ típus $\mathcal{A}$-ban realizálható, mondjuk $c_p \in A$ realizálja p-t. Legyen minden $p \in S_1^{\mathcal{C}}(Y)$-ra $d_p = \langle c_p, ..., c_p \rangle \in {}^nA$ és legyen $q_p = tp^{\mathcal{A}}(d_p/Y)$. Ekkor $\{q_p : p \in S_1^{\mathcal{C}}(Y)\} \subseteq S_n^{\mathcal{C}}(Y)$-nak egy λ-nál nagyobb számosságú részhalmaza.

A fordított irányú következtetést n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha

$n = 1$, akkor (1)-ből (2) nyilvánvalóan következik az $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ és $X = Y$ választással. tegyük most fel, hogy adott n-re (1)-ből (2) következik és legyen $X \in [A]^\lambda$ olyan, hogy $|S^{\mathcal{A}}_{n+1}(X)| > \lambda$. Legyen megint $\mathcal{C}$ az $\mathcal{A}$ egy λ^+-szaturált elemi bővítése. A 2.39 lemma miatt ekkor $\mathcal{C}$-ben mindegyik $p \in S^{\mathcal{A}}_{n+1}(X)$ realizálható, mondjuk p-t a $\bar{c}_p = \langle c_p(0), ..., c_p(n)\rangle \in {}^{n+1}C$ sorozat realizálja. Mindegyik $p \in S^{\mathcal{A}}_{n+1}(X)$-re legyen

$$q_p = tp^{\mathcal{A}}(\langle c_p(0), ..., c_p(n-1)\rangle / X) \in S^{\mathcal{A}}_n(X).$$

Ha a $Q = \{q_p : p \in S^{\mathcal{A}}_{n+1}(X)\}$ típushalmaz legalább λ^+ számosságú, akkor $|S^{\mathcal{A}}_n(X)| > \lambda$ és ezért az indukciós feltevésünket alkalmazva (2) következik. Ezért feltehetjük, hogy $|Q| \leq \lambda$. Ekkor viszont a skatulya elv (és λ^+ regularitása) miatt van olyan $p \in S^{\mathcal{A}}_{n+1}(X)$, melyre a $P = \{r \in S^{\mathcal{A}}_{n+1}(X) : q_p = q_r\}$ típushalmaz legalább λ^+ számosságú. Legyen $Y = X \cup \{c_p(0), ..., c_p(n-1)\}$. Mivel λ végtelen, $|Y| = \lambda$. Figyeljük meg, hogy ha $r, s \in P$ különböző típusok, akkor $tp^{\mathcal{C}}(c_r(n)/Y) \neq tp^{\mathcal{C}}(c_s(n)/Y)$, hiszen ellenkező esetben $\bar{c}_r$ és $\bar{c}_s$ X feletti típusai megegyeznének, amiből az $r = s$ ellentmondás következne.

Ezek szerint viszont $|\{tp^{\mathcal{C}}(c_r(n)/Y) : p \in P\}| = |P| \geq \lambda^+$, azaz (2) teljesül. ∎

Az eddig megismert, számosságokkal paraméterezett fogalmaink (például κ-univerzalitás, erős κ-homogenitás, κ-szaturáltság, stb.) annál erősebb kirovásokat posztulálnak, minél nagyobbak a bennük előforduló számosságok. A stabilitás esetében nem ez a helyzet. Hogy ezt igazoljuk, egy kis előkészületet kell tennünk.

Ebben a fejezetben sokszor lesz szükségünk a *(gyökeres) fa* fogalmára. Mint ismeretes, a fák a körmentes és összefüggő gráfok; ha egy fa egy csúcsát kitüntetjük, akkor gyökeres fát kapunk. Gyökeres fákban minden a csúcsból pontosan egy (élismétlést nem tartalmazó) $p(a)$ út vezet a gyökérbe, a szomszédai közül a $p(a)$-belit a megelőzőjének, a többi szomszédot a rákövetkezőinek nevezzük. A gyökérnek nincs megelőzője; egy csúcsot levélnek nevezünk, ha nincsenek rákövetkezői. Fel fogjuk tenni, hogy fáinkban minden nem-levél csúcs rákövetkezői egy rendszám elemeivel vannak indexelve (azaz „fel vannak sorolva": a rákövetkezők között van első, második, ... ,α-adik...).

Legyen T egy gyökeres fa, ekkor T minden a csúcsát egyértelműen azonosítja a gyökérből a-ba vezető $p(a)$ út. Egy ilyen utat úgy írhatunk le, hogy sorban megadjuk, hogy az út adott csúcsának hányadik rákövetkezője lesz ismét az úton (azaz megadjuk, hogy utunk során egy adott pontból „merre kell fordulni" a következő csúcs eléréséhez). Ha az a csúcs a β-adik szinten van, akkor az előbbi útmegadás azt jelenti, hogy megadunk egy β-n értelmezett, rendszámértékű f függvényt: ha $\alpha \in \beta$ akkor $f(\alpha)$ azt adja meg, hogy $p(a)$ (gyökértől számított) α-adik csúcsának $f(\alpha)$-adik rákövetkezője lesz $p(a)$ $\alpha+1$-edik csúcsa. Ezért egy (gyökeres) fa csúcsait azonosíthatjuk bizonyos rendszámértékű függvényekkel. Például ${}^{<\omega}2 = \cup_{n \in \omega} {}^n 2$ elemei egy olyan fa csúcsai(val azonosíthatók), melyben minden csúcsnak pontosan 2 rákövetkezője van, és a fában nincsenek levelek (a fa ω magas).

6.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy L-struktúra, $\lambda \geq |Form(L)|$ végtelen számosság és legyen $X \in [A]^{\leq\lambda}$. Ekkor*

(1) Ha $N_\varphi \subseteq S_1^{\mathcal{A}}(X)$-re $|N_\varphi| > \lambda$ akkor van olyan $\psi \in Form(L_X)$ formula, melyre $|N_{\varphi\wedge\psi}|, |N_{\varphi\wedge\neg\psi}| > \lambda$.

(2) Ha $|S_1^{\mathcal{A}}(X)| > \lambda$ akkor van olyan $Y \in [X]^{\leq\aleph_0}$, melyre $|S_1^{\mathcal{A}}(Y)| = 2^{\aleph_0}$.

(3) Ha T egy $\aleph_0$-stabil elmélet, akkor T minden végtelen λ-ra λ-stabil.

Bizonyítás. (1) igazolásához tegyük fel, hogy $|N_\varphi| > \lambda$ és gyűjtsük össze azokat a formulákat, melyek λ-nál több N_φ-beli típusnak elemei, azaz legyen

$$F = \{\psi \in Form(L_X) : |\{p \in N_\varphi : \psi \in p\}| > \lambda\}.$$

Legyen most $M \subseteq N_\varphi$ az olyan típusok halmaza, melyekben csak F-beli formulák vannak: $M = \{p \in N_\varphi : p \subseteq F\}$. Vegyük észre, hogy ha egy p típus nincs M-ben, annak „van egy oka": van p-ben egy F-en kívüli ψ formula. Ez a ψ legfeljebb λ darab másik típusban lehet, ezért 1-1 formula legfeljebb λ darab típust zárhat ki M-ből. Mivel az L_X nyelven legfeljebb λ különböző formula van, (és mint láttuk, az F-en kívüli formulák egyenként legfeljebb λ darab különböző típusban vannak benne) ezért $|M| > \lambda$ is teljesül. Speciálian: M-ben van legalább kettő különböző elem, mondjuk p és q. Legyen $\psi \in p - q$ tetszőleges. Ekkor $\psi, \neg\psi \in F$ miatt $|N_{\varphi\wedge\psi}|, |N_{\varphi\wedge\neg\psi}| > \lambda$, ahogyan állítottuk.

(2) igazolásához a $T = {}^{<\omega}2$ fa ágait fogjuk formulákkal színezni, az $s \in {}^{<\omega}2$ csúcs színe a φ_s formula lesz. A színezésre teljesülni fog, hogy minden $s \in {}^{<\omega}2$-re és $a \in \{0,1\}$-re

(a) $\quad |N_{\varphi_s}| > \lambda$,
(b) $\quad \mathcal{A} \models \varphi_{s^\frown a} \Rightarrow \varphi_s$,
(c) $\quad N_{\varphi_{s^\frown 0}} \cap N_{\varphi_{s^\frown 1}} = \emptyset$.

Legyen $\varphi_\emptyset =$„v $=$ v". Ekkor $N_{v=v} = S_1^{\mathcal{A}}(X)$ miatt (a) teljesül. Tegyük most fel, hogy $n \in \omega$ és minden, n-nél rövidebb $s \in {}^{<n}2$ sorozatra teljesül $(a)-(c)$. Legyen $s \in {}^{n-1}2$. Ekkor (1)-et N_{φ_s}-re alkalmazva adódik, hogy van olyan ψ formula, melyre $|N_{\varphi_s\wedge\psi}|, |N_{\varphi_s\wedge\neg\psi}| > \lambda$. Legyen $\varphi_{s^\frown 0} = \varphi_s \wedge \psi$ és $\varphi_{s^\frown 1} = \varphi_s \wedge \neg\psi$. Világos, hogy így $(a)-(c)$ érvényben marad. Ezzel az egész T színezését megadtuk.

T-nek csak $|\cup_{n\in\omega} {}^n2| \leq \Sigma_{n\in\omega} 2^n = \aleph_0$ csúcsa van, a csúcsokhoz tartozó formulákban külön-külön X-nek mindig csak véges sok eleme fordul elő, ezért a T csúcsaihoz tartozó formulákban összesen csak megszámlálható sok X-beli paraméter fordul elő, legyen e paraméterek halmaza Y. Legyen minden $f \in {}^\omega2$-re $p_f = \{\varphi_{f|n} : n \in \omega\}$. Minden $f \in {}^\omega2$-re p_f végesen realizálható formulahalmaz: p_f egy véges részében van olyan formula, melyből (b) szerint a többi következik, és (a) szerint még ez az utolsó formula is (sokféleképpen) kiterjeszthető egy típussá, speciálisan realizálható is. Tehát mindegyik p_f kiterjeszthető egy Y feletti q_f típussá. Végül, ha $f \neq g \in {}^\omega2$, akkor van olyan $n \in \omega$, melyre $f(n) \neq g(n)$, és ezért $f|(n+1) \neq g|(n+1)$, azaz $p_f \neq p_g$. Emiatt $|\{q_f : f \in {}^{\omega}2\}| = |{}^{\omega}2| = 2^{\aleph_0}$. Tehát $|S_1^{\mathcal{A}}(Y)| \geq 2^{\aleph_0}$. Mivel megszámlálható halmazok felett legfeljebb kontinuum sok típus van, ezért (2) valóban teljesül.

Végül (3) igazolásához tegyük fel, hogy T valamilyen végtelen λ-ra nem λ-stabil; meg kell mutatnunk, hogy ekkor T nem $\aleph_0$-stabil. Mivel T nem λ-stabil, ezért van olyan $\mathcal{A} \models T$ és $X \in [A]^{\lambda}$, melyre $|S_1^{\mathcal{A}}(X)| > \lambda$. Ezért (2) miatt van olyan $Y \in [X]^{\aleph_0}$, melyre $|S_1^{\mathcal{A}}(Y)| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, azaz T valóban nem $\aleph_0$-stabil. ∎

A 6.3 tétel és a 6.1 definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden $\aleph_0$-stabil elmélet szuperstabil és minden szuperstabil elmélet stabil. Most megmutatjuk, hogy ezek a következtetések nem fordíthatók meg. Ehhez hasznos lesz külön meggondolni, hogy „az automorfizmusok megőrzik a típusokat”. Ezt az alábbi egyszerű állítás teszi precízzé, melyet egyébként korábban is használtunk már.

6.4. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egy struktúra, legyen $X \subseteq A$ és legyen $n \in \omega$. Ha $\bar{a}, \bar{b} \in {}^{n}A$ olyan sorozatok, melyekhez $\mathcal{A}$-nak van olyan X-et pontonként fixen hagyó automorfizmusa mely $\bar{a}$-t $\bar{b}$-re képezi, akkor $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/X) = tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}/X)$.*

Bizonyítás. Legyen f a szóbanforgó automorfizmus. Ekkor tetszőleges φ formulára és X-beli $\bar{c}$ konstanssorozatra

$$\varphi(\bar{v}, \bar{c}) \in tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/X) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}, \bar{c}] \overset{1.9}{\Leftrightarrow} \mathcal{A} \models \varphi[f(\bar{a}), f(\bar{c})] \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}, \bar{c}] \Leftrightarrow \varphi(\bar{v}, \bar{c}) \in tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}/X).$$

∎

6.5. Tétel.
(0) *Van olyan elmélet, mely $\aleph_0$-stabil.*
(1) *Van olyan elmélet, mely szuperstabil, de nem $\aleph_0$-stabil.*
(2) *Van olyan elmélet, mely stabil, de nem szuperstabil.*
(3) *Van olyan elmélet, mely nem stabil.*

Bizonyítás. (0)-ra talán a legegyszerűbb példa az üres nyelv feletti elmélet (ebben a nyelvben csak az „=” relációszimbólum szerepel). Ha $\mathcal{A}$ egy modellje ennek az elméletnek, és $X \in [A]^{\aleph_0}$, akkor minden $a, b \in A - X$-hez van $\mathcal{A}$-nak egy X-t pontonként fixen hagyó és a-t b-re képező automorfizmusa, ezért a 6.4 lemma miatt a és b X feletti típusa azonos. Emiatt $|S_1^{\mathcal{A}}(X)| = |X| + 1 = \aleph_0$, azaz elméletünk valóban $\aleph_0$-stabil.

Érdekesebb és fontosabb a (rögzített karakterisztikájú) algebrailag zárt testek elmélete: ezek is mind $\aleph_0$-stabilak. Legyen ugyanis $\mathcal{A}$ egy algebrailag zárt test és legyen $X \in [A]^{\aleph_0}$. Legyen B az X által generált résztest $\mathcal{A}$-ban. B is megszámlálható, és B felett legalább annyi típus van, mint X felett, ezért elég megmutatni, hogy $S_1^{\mathcal{A}}(B)$ megszámlálható. Legyen $a \in A$ tetszőleges elem. Ha a algebrai B felett, akkor B felett van egy minimálpolinomja, mely azonosítható B-beli együtthatóinak véges sorozatával. Továbbá, mivel minden elem gyöke a minimálpolinomjának, az algebra alaptétele miatt csak véges sok elemnek lesz ugyanaz a minimálpolinomja B felett. Ezért B felett algebrai elemből csak megszámlálható sok lehet. Legyen most $b \in A$ egy másik elem, ha a és b is transzcendens B felett, akkor (a transzcendens testbővítések unicitása és $\mathcal{A}$ algebrai zártsága miatt) $\mathcal{A}$-nak van olyan B-t elemenként fixen hagyó automorfizmusa, mely a-t b-be viszi. Tehát a 6.4 lemma miatt a B felett transzcendens elemek típusai mind azonosak. Ezért B felett legfeljebb 1-el több különböző típus lehet, mint ahány algebrai elem van B felett. Vagyis $S_1^{\mathcal{A}}(B)$ valóban megszámlálható.

(1) igazolásához válasszunk egy olyan nyelvet, amiben minden $n \in \omega$-ra van egy 1-változós R_n relációszimbólum, és T álljon az összes $\exists v(R_{i_0}(v) \wedge ... \wedge R_{i_{n-1}}(v) \wedge \neg R_{j_0}(v) \wedge ... \wedge \neg R_{j_{m-1}}(v))$ alakú formulákból, melyekben az R-ekben fellépő összes index páronként különböző. Ez az elmélet nem $\aleph_0$-stabil, mert tetszőleges $S \subseteq \omega$-ra a $p_S = \{R_i(v) : i \in S\} \cup \{\neg R_j(v) : j \notin S\}$ formulahalmaz végesen realizálható, ezért mindegyikük kiterjeszthető egy üreshalmaz feletti típussá. Ezek a típusok ω különböző részhalmazaira különbözők lesznek. Ezért T minden modelljében az üreshalmaz felett (és így a megszámlálható részhalmazok felett méginkább) $2^{\aleph_0}$ típus van.

Ugyanakkor, ha $\lambda \geq 2^{\aleph_0}$, akkor T λ-stabil. Legyen ugyanis $\mathcal{A} \models T$ egy struktúra és legyen $X \in [A]^{\lambda}$ tetszőleges. Nevezzük az $a, b \in A - X$ elemeket ekvivalenseknek, ha pontosan ugyanazokban az $R_i^{\mathcal{A}}$ relációknak elemei. X-n kívül csak $2^{\aleph_0}$ ekvivalenciaosztály van. Most megmutatjuk, hogy ekvivalens elemek X feletti típusai azonosak. Legyen tehát $a, b \in A - X$ két ekvivalens elem, és legyen $f : A \to A$ az a függvény, mely a-t és b-t felcseréli, minden más elemet fixen hagy. Ekkor f az $\mathcal{A}$ egy automorfizmusa, mely identikus X-n, ezért a 6.4 lemma miatt a és b X feletti típusai valóban azonosak. Persze X felett X elemeinek páronként különböző a típusa. Ez azt jelenti, hogy $|S_1^{\mathcal{A}}(X)| \leq 2^{\aleph_0} + |X| = \lambda$, azaz T valóban λ-stabil.

(2) Igazolásához olyan nyelvet választunk, melyben minden $n \in \omega$-ra E_n egy 2-változós relációszimbólum. T álljon a következő (végtelen sok) formulákból: minden $n \in \omega$-ra E_n egy olyan ekvivalencia reláció, melynek végtelen sok ekvivalenciaosztálya van és mindegyik ekvivalenciaosztály végtelen, továbbá minden $n \in \omega$-ra E_n mindegyik ekvivalenciaosztálya E_{n+1} végtelen sok osztályának uniója. Világos, hogy ez az elmélet konzisztens; megmutatjuk, hogy T akkor és csak akkor λ-stabil, ha $\lambda^{\aleph_0} = \lambda$. A számosságaritmetika elemi tételei szerint ebből (2) már következik.

Legyen λ rögzített végtelen számosság. Először megadjuk T egy olyan $\mathcal{A}$ modelljét és ennek egy $X \in [A]^{\lambda}$ részhalmazát, melyre $|S_1^{\mathcal{A}}(X)| \geq \lambda^{\aleph_0}$. Legyen $\mathcal{A}$ olyan modellje T-nek, melyben mindegyik E_n-nek legalább λ darab ekvivalenciaosztálya van és minden ilyen osztály külön-külön E_{n+1} legalább λ darab osztályának uniója (ilyen $\mathcal{A}$ is nyilvánvalóan van, például T egy tetszőleges modelljének egy λ^+-reguláris ultraszűrő szerinti ultrahatványa a 2.29 tétel miatt megfelelő). Most kiszínezzük a ${}^{<\omega}\lambda$ fát A elemeivel. Legyen $a_\emptyset \in A$ tetszőleges, és ha valamilyen $s \in {}^n\lambda$-ra a_s már definiált, akkor vegyünk fel λ darab elemet (legyenek ezek $\{b_\alpha : \alpha < \lambda\}$) az E_n a_s-t tartalmazó ekvivalenciaosztályában úgy, hogy ezek a b_α-k E_{n+1}-nek páronként különböző ekvivalenciaosztályába essenek. Ezek után minden $\alpha \in \lambda$-ra legyen $a_{s^\frown\alpha} = b_\alpha$. Legyen $X = \{a_s : s \in {}^{<\omega}\lambda\}$. Ekkor $|X| = |{}^{<\omega}\lambda| = \Sigma_{n\in\omega}\lambda^n = \lambda \cdot \aleph_0 = \lambda$, ezért elég megmutatni, hogy $\mathcal{A}$-ban X felett legalább $\lambda^{\aleph_0}$ különböző típus van. Minden $f \in {}^\omega\lambda$-ra legyen $p_f = \{E_n(v, a_{f|n}) : n \in \omega\}$. Világos, hogy különböző f-ekre a p_f-ek is különbözők lesznek, és hogy p_f minden véges része konzisztens: ugyanis p_f minden véges r részében van egy legnagyobb $n \in \omega$ melyre még $E_n(v, a_{f|n})$ benne van r-ben, ekkor $a_{f|n}$ realizálja r-t. Ezért a 2.4 tétel miatt mindegyik p_f kiterjeszthető egy X feletti q_f típussá, és az előzőek miatt $|\{q_f : f \in {}^\omega\lambda\}| = \lambda^{\aleph_0}$ vagyis $|S_1^{\mathcal{A}}(X)| \geq \lambda^{\aleph_0}$, ahogy állítottuk.

Most azt mutatjuk meg, hogy ha $\mathcal{A} \models T$ és $X \in [A]^\lambda$ tetszőlegesek, akkor $|S_1^{\mathcal{A}}(X)| \leq \lambda^{\aleph_0}$. Ehhez elég megmutatni, hogy $\mathcal{A}$-nak van olyan $\mathcal{B}$ elemi bővítése, melyben $S_1^{\mathcal{A}}(X)$ minden eleme realizálható és az X-et elemenként fixen hagyó automorfizmusok csoportjának legfeljebb $\lambda^{\aleph_0}$ pályája van, mert ekkor a 6.4 lemma miatt X felett $\mathcal{B}$-ben (és így persze $\mathcal{A}$-ban is) legfeljebb $\lambda^{\aleph_0}$ típus van. $\mathcal{A}$-t egy λ^+-szaturált elemi bővítésére cserélve feltehetjük, hogy $\mathcal{A}$-ban $S_1^{\mathcal{A}}(X)$ minden eleme realizálható. Legyen $\kappa > |A|$ számosság; ekkor teljesül, hogy minden $n \in \omega$-ra E_n-nek κ-nál kevesebb ekvivalenciaosztálya van és mindegyik ekvivalenciaosztály E_{n+1} κ-nál kevesebb osztályának uniója. Legyen $\mathcal{F}$ egy κ-reguláris és nem $\aleph_1$-teljes ultraszűrő κ-n (ilyen van a 2.21 tétel miatt) és legyen $\mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ $\mathcal{F}$ szerinti ultrahatványa. Szokás szerint, azonosítsuk A elemeit a diagonális beágyazásnak megfelelő B-beli képeikkel. A 2.29 tétel szerint ekkor $|B| = |A|^\kappa$ és $2^\kappa \leq |A|^\kappa \leq 2^{|A|\cdot\kappa} = 2^\kappa$ miatt $|B| = 2^\kappa$. Hasonlóan adódik, hogy ha $H \subseteq A$ egy reprezentánsrendszer $E_n^{\mathcal{A}}$-ban, akkor H ultrahatványa reprezentánsrendszer lesz $E_n^{\mathcal{B}}$-ben, és (H ultrahatványát U-val jelölve) $|U| = |H|^\kappa \leq 2^{|H|\cdot\kappa} = 2^\kappa$ továbbá $2^\kappa \leq |H|^\kappa$ ezért $|U| = 2^\kappa$, vagyis minden $n \in \omega$-ra $E_n^{\mathcal{B}}$-nek pontosan 2^κ darab ekvivalenciaosztálya van, és teljesen hasonlóan adódik, hogy ezek az osztályok E_{n+1} pontosan 2^κ darab osztályának uniói. Sőt, ugyanígy adódik a következő is. Mivel $\mathcal{F}$ nem $\aleph_1$-teljes, vannak olyan $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \in \mathcal{F}$ halmazok, melyekre $\cap_{n\in\omega} I_n = \emptyset$ ezért minden $\alpha \in \kappa$-ra van egy legnagyobb $n(\alpha) \in \omega$ melyre még $\alpha \in I_{n(\alpha)}$ teljesül. Legyen minden $n \in \omega$-ra G_n az E_n egyik ekvivalenciaosztálya, ekkor

$$(*) \qquad |\Pi_{\alpha\in\kappa} G_{n(\alpha)}/\mathcal{F}| = 2^\kappa.$$

Legyen most $X \in [A]^\lambda$ és legyen minden $n \in \omega$-ra $X_n \subset X$ egy olyan maximális részhalmaz X-ben, melynek elemei páronként nem ekvivalensek E_n szerint. Világos, hogy minden $n \in \omega$-ra $|X_n| \leq |X| = \lambda$. Az $a, b \in B - X$ elempár legyen $\sim$ relációban, ha minden $n \in \omega$-ra a és b E_n szerint vagy ugyanazzal az X_n-beli elemmel ekvivalens, vagy X_n egyik elemével sem ekvivalens. Ekkor a $\sim$-ekvivalenciaosztályok száma: $(|X_n|+1)^\omega \leq \lambda^{\aleph_0}$. Most megmutatjuk, hogy ha $a, b \in B - X$ és $a \sim b$ akkor B-nek van olyan f automorfizmusa, mely X elemeit pontonként fixen hagyja és a-t b-re képezi. Legyen f_0 az a függvény, mely $X \cup \{a, b\}$-n van értelmezve, X-n identikus és a-t b-re, b-t a-ra képezi. Mivel $a \sim b$, ezért f_0 egy izomorfizmus értelmezési tartománya és értékkészlete között. Most transzfinit rekurzióval kiterjesztjük f_0-t $\mathcal{B}$ egy automorfizmusává. Soroljuk fel $B - dom(f_0)$-t: $B - X - \{a, b\} = \{b_\alpha : \alpha < 2^\kappa\}$ és tegyük fel, hogy $\mu \leq \kappa$ és minden $\nu < \mu$-re f_ν-t már definiáltuk úgy, hogy minden $\varrho < \nu < \mu$-re teljesülnek az alábbiak:

(i) $f_\varrho \subseteq f_\nu$,
(ii) $dom(f_\nu), range(f_\nu) \supseteq X \cup \{a, b\} \cup \{b_\alpha : \alpha < \nu\}$,
(iii) $|dom(f_\nu)| \leq \lambda + |\nu|$,
(iv) f_ν egy izomorfizmus értelmezési tartománya és értékkészlete között.

Világos, hogy $(i) - (iv)$ teljesül f_0-ra. Ha μ limeszrendszám, akkor legyen $f_\mu = \cup_{\nu<\mu} f_\nu$, ekkor $(i) - (iv)$ nyilván érvényben marad.

Ha μ rákövetkező, mondjuk, $\mu = \nu + 1$, akkor tekintsük b_ν-t. Legyen

$$V = \{n \in \omega : (\exists e \in dom(f_\nu))\mathcal{A} \models E_n(b_\nu, e)\}.$$

Ha V korlátos, és n a legnagyobb eleme, akkor legyen $e \in dom(f_\nu)$ egy olyan elem, mely E_n szerint ekvivalens b_ν-vel. Mivel az $f_\nu(e)/E_n$ ekvivalenciaosztály E_{n+1} 2^κ darab osztályának uniója, E_{n+1}-nek van olyan o osztálya, mely diszjunkt $range(f_\nu)$-től és melyre $o \subseteq f_\nu(e)/E_n$. Legyen $c \in o$ tetszőleges, és legyen f'_ν f_ν-nek az a kiterjesztése, mely b_ν-t c-re képezi.

Ha V nem korlátos, akkor minden $n \in \omega$-ra legyen $e_n \in dom(f_\nu)$ egy E_n szerint b_ν-vel ekvivalens elem, és minden $n \in \omega$-ra legyen $G_n = f_\nu(e_n)/E_n$. Ekkor $(*)$ és (iii) miatt van olyan $c \in B - range(f_\nu)$, mely minden $n \in \omega$-ra E_n szerint ekvivalens $f_\nu(e_n)$-el. Legyen f'_ν az a kiterjesztése f_ν-nek, mely b_ν-t c-re képezi.

Mindkét esetben f'_ν-re teljesül (i), (iii) és (iv). Az előző két bekezdésben leírtak szerint terjesszük ki f'_ν inverzét úgy, hogy a kiterjesztés értékkészletében is benne legyen b_ν; ez az újabb kiterjesztés legyen f_μ. Végül f_{2^κ} lesz a keresett automorfizmus.

Tehát a 6.4 lemma szerint $B - X$-ben a $\sim$-ekvivalens elemek típusai azonosak. Ezek szerint $|S_1^{\mathcal{A}}(X)| = |S_1^{\mathcal{B}}(X)| \leq |X| + |(B - X)/\sim| \leq \lambda + \lambda^{\aleph_0} = \lambda^{\aleph_0}$, ahogy állítottuk.

Végül (3) bizonyításához vegyük észre, hogy az 5.3 tétel szerint a véletlen gráfok T_R elmélete instabil. ∎

Nem $\aleph_0$-stabil elméletekre természetesen adódik még egy példa. Legyen $\Re$ a valós számok halmaza, $\mathbf{Q}$ pedig a racionális számok halmaza. Legyen $\mathcal{A} = \langle \Re, < \rangle$, ahol a rendezés a szokásos módon van értelmezve. Ekkor $\mathcal{A}$-ban az irracionális számok $\mathbf{Q}$ feletti típusai páronként különbözni fognak, hiszen páronként eltérő Dedekind-szeletekhez tartoznak.

Kicsit alaposabban megvizsgálva a helyzetet, látjuk, hogy $\mathcal{A}$-ban van egy olyan $\{a_i : i \in \omega\}$ részhalmaz (ez most éppen ω) és egy olyan $\varphi(v,w)$ formula (ez most $\varphi(v,w) = v < w$), melyre teljesül, hogy $\mathcal{A} \models \varphi[a_i, a_j] \quad \Leftrightarrow \quad i < j$.

Következő célunk igazolni, hogy instabil elméletek esetében ez nem is lehet másképp. Meg fogjuk mutatni, hogy instabil elméleteknek mindig van olyan modellje, amiben van egy végtelen $\{a_i : i \in \omega\}$ elemhalmaz, amiket egy φ formula indexeiknek megfelelően rendez. Ez az eredmény az instabil elméletek egy olyan jellemzését adja, mely nem hivatkozik a Stone-terek méreteire, hanem lényegében a nyelv szintjén garantál „egyetlen okot, mely felelős a szóbanforgó elmélet instabilitásáért".

6.6. Definíció. *Legyen T egy teljes elmélet és legyen $\varphi(\bar{v}, \bar{w})$ egy T nyelvén adott formula. Azt mondjuk, hogy $\varphi(\bar{v}, \bar{w})$ a T egy rendezőformulája, ha minden $n \in \omega$-ra teljesül, hogy*

$$T \models \exists \bar{x}_0 ... \exists \bar{x}_{n-1} (\wedge_{i<j<n} \varphi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \wedge \wedge_{i \not< j < n} \neg \varphi(\bar{x}_i, \bar{x}_j)).$$

6.7. Definíció. *Legyen az $\mathcal{A} = \langle P, <^{\mathcal{A}} \rangle$ struktúra egy rendezett halmaz. A $Q \subseteq P$ részhalmazt P-ben sűrűnek nevezzük, ha minden $a <^{\mathcal{A}} c \in A$-hoz van $b \in P$, melyre $a <^{\mathcal{A}} b <^{\mathcal{A}} c$ teljesül.*

6.8. Lemma. *Ha λ végtelen számosság, akkor van olyan $\mathcal{A} = \langle P, Q, < \rangle$ struktúra, hogy $\langle P, < \rangle$ egy rendezett halmaz, $|P| > \lambda$, $Q \subseteq P$, $|Q| \leq \lambda$ és Q sűrű P-ben.*

Bizonyítás. A valós számok és racionális számok viszonyát fogjuk utánozni. Legyen μ az a legkisebb számosság, melyre $2^\mu > \lambda$. Ilyen μ van, sőt $\mu \leq \lambda$. Legyen

$$R = \{s \in {}^{\mu}2 : (\exists \alpha < \mu)(\forall \beta > \alpha) s(\alpha) = 1\} \text{ és legyen}$$

$$Q = \{s \in {}^{\mu}2 : (\exists \alpha < \mu)(\forall \beta > \alpha) s(\alpha) = 0\}.$$

Ekkor, mivel $\alpha < \mu$ esetén $2^\alpha \leq \lambda$, $|Q| = |R| = \Sigma_{\alpha<\mu} 2^\alpha \leq \mu \cdot \lambda = \lambda$. Legyen $P = {}^{\mu}2 - R$, ekkor $|P| > \lambda$. Legyen $<$ a P lexikografikus rendezése. Megmutatjuk, hogy az $\mathcal{A} = \langle P, Q, < \rangle$ struktúra eleget tesz az állításunknak. Csak az szorul indoklásra, hogy Q sűrű P-ben. Ennek igazolásához tegyük fel, hogy $a < c \in P$. Legyen $\alpha \in \mu$ az a legkisebb index, ahol a és c először eltér. Ekkor $a(\alpha) = 0, c(\alpha) = 1$ és minden $\beta < \alpha$-ra $a(\beta) = c(\beta)$. Mivel $a \in P$, van olyan $\alpha < \gamma < \mu$, melyre $a(\gamma) = 0$. Legyen most $b \in P$ az az elem, melyre teljesül, hogy minden $\beta < \gamma$-ra $b(\beta) = a(\beta)$, $b(\gamma) = 1$ és minden $\gamma < \beta < \mu$-re $b(\beta) = 0$. Ekkor világos, hogy $a < b$ és $b(\alpha) = a(\alpha) = 0, c(\alpha) = 1$ miatt $b < c$ is teljesül. ∎

Most rátérhetünk az instabil elméletek jellemzésére. A jellemzés első lépéseként igazoljuk, hogy ha egy elméletnek van rendezőformulája, akkor az elmélet nem lehet stabil.

6.9. Tétel. *Legyen T teljes és konzisztens elmélet. Ha T-nek van rendezőformulája akkor T egyetlen végtelen λ-ra sem λ-stabil.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi(\bar{v}, \bar{w})$ a T egy rendezőformulája, és legyen λ végtelen számosság. Azt kell megmutatnunk, hogy van olyan $\mathcal{B} \models T$ és $X \in [B]^\lambda$ melyre $|S_1^\mathcal{B}(X)| > \lambda$. Legyen $\mathcal{A} = \langle P, Q, < \rangle$ a 6.8 lemma állításában szereplő struktúra, és minden $a \in P$-hez vegyünk fel egy új c_a konstansszimbólumot. (Precízebben azt kéne írni, hogy c_a egy $\bar{v}$ hosszú konstansszimbólum-sorozat, a jelölések egyszerűsítése érdekében feltesszük, hogy $\bar{v}$ hossza 1. Ez az egyszerűsítés nem megy az általánosság rovására.) Tekintsük a következő T' elméletet:

$$T' = T \cup \{\varphi(c_a, c_b) : a, b \in P, a < b\} \cup \{\neg\varphi(c_a, c_b) : a, b \in P, a \not< b\}.$$

Mivel φ rendezőformulája T-nek, T' minden véges részhalmaza konzisztens. Emiatt a 2.22 kompaktsági tétel miatt van T'-nek egy B modellje. Legyen $X = \{c_a^\mathcal{B} : a \in Q\}$, ekkor $|X| = \lambda$ és minden $a < c \in P$-re $tp^\mathcal{B}(c_a^\mathcal{B}/X) \neq tp^\mathcal{B}(c_c^\mathcal{B}/X)$, hiszen Q sűrű P-ben, ezért van olyan $b \in Q$, melyre $a < b < c$ és így $\varphi(\bar{v}, b) \in tp^\mathcal{B}(c_a^\mathcal{B}/X)$ de $\varphi(\bar{v}, b) \notin tp^\mathcal{B}(c_c^\mathcal{B}/X)$. ∎

Célunk, hogy igazoljuk az előző tétel megfordítását is: ha egy elmélet instabil, annak az az oka, hogy az elméletnek van rendezőformulája. Ehhez fel fogjuk használni a következő önmagában is érdekes, és nagyon fontos tételt.

6.10. Tétel. *Legyen T olyan teljes és konzisztens elmélet, melynek nincs rendezőformulája, tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \models T, X \subseteq A$ és $R \subseteq {}^nA$ olyan reláció, mely A-beli paraméterekkel definiálható. Ekkor van olyan X-beli paraméterekkel definiálható R' reláció, melyre ${}^nX \cap R = {}^nX \cap R'$.*

E tétel bizonyítását a fejezet végére halasztjuk. Figyeljük meg, hogy nem tettük fel, hogy X definiálható halmaz és azt sem tettük fel, hogy az R-t definiáló formula paraméterei X-ben lennének. Ennek ellenére, az előbbi tétel szerint, egy definiálható R reláció X-beli nyomát X-beli paraméterekkel is tudjuk definiálni, ha T-ben nincs rendezőformula.

Feladat. Igazoljuk, hogy a véletlen gráfok elméletének minden $\aleph_1$-szaturált $\mathcal{A}$ modelljében és minden $X \in [A]^{\aleph_0}$ részhalmazhoz van olyan A-beli paraméterekkel definiálható reláció, melynek X-beli nyoma X-beli paraméterekkel nem definiálható.

6.11. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy L-struktúra, $X, Y \subseteq A$, $n \in \omega$ és legyen $p \in S_n^{\mathcal{A}}(X)$. Azt mondjuk, hogy p egy Y felett definiálható típus, ha L minden $\varphi(\bar{v}, \bar{w})$ formulájához van olyan $\partial\varphi(\bar{w}) \in Form(L_Y)$ formula, hogy minden $\bar{a} \in X$-re teljesül a*

$$\varphi(\bar{v}, \bar{a}) \in p \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \partial\varphi[\bar{a}]$$

összefüggés. A $\varphi \mapsto \partial\varphi$ megfeleltetést p egy Y feletti definiáló sémájának nevezzük.

Ezek szerint, ha p definiálható típus, akkor $\varphi(\bar{v}, \bar{a})$ pontosan akkor van p-ben, ha $\bar{a}$-ra teljesül egy (paraméteres) elsőrendű formula, (ahol a paraméterek csak φ-től függnek, további paraméterektől már nem); ezt a formulát jelöltük $\partial\varphi$-vel.

6.12. Tétel. *Legyen T olyan elmélet, melynek nincs rendezőformulája, tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \models T, X \subseteq A$. Ekkor minden $p \in S_n^{\mathcal{A}}(X)$ típus X felett definiálható.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ egy $|A|$-szaturált elemi bővítése $\mathcal{A}$-nak (ilyen $\mathcal{B}$ van a 2.43 és 2.44 tételek miatt). $\mathcal{B}$-ben van tehát egy $\bar{b} \in B$ sorozat, mely realizálja p-t. Jelöljük $\mathcal{A}$ nyelvét L-el. A 6.10 tétel szerint minden $\varphi(\bar{v}, \bar{w}) \in Form(L)$ formulához van egy csak X-beli paramétereket tartalmazó másik $\phi(\bar{w})$ formula, hogy $\varphi(\bar{b}, \bar{w})$ és $\phi(\bar{w})$ X-beli nyoma azonos. Minden φ-re legyen $\partial\varphi(\bar{w}) = \phi(\bar{w})$. Ekkor minden $\bar{a} \in X$-re

$$\varphi(\bar{v}, \bar{a}) \in p \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \partial\varphi(\bar{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \partial\varphi(\bar{a})$$

azaz a $\varphi \mapsto \partial\varphi$ megfeleltetés p egy X feletti definiáló sémája. ∎

6.13. Tétel. *Legyen T konzisztens elmélet az L nyelven. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

(1) *T-nek nincs rendezőformulája.*
(2) *T minden modelljének minden részhalmaza felett minden típus definiálható.*
(3) *Ha $\lambda = \lambda^{|Form(L)|}$ végtelen számosság, akkor T λ-stabil.*
(4) *T stabil.*

Bizonyítás. A 6.12 tétel szerint (1)-ből következik (2). Tegyük most fel (2)-t és legyen λ olyan számosság, melyre $\lambda = \lambda^{|Form(L)|}$ teljesül. Azt kell megmutatnunk, hogy ha $\mathcal{A} \models T$ és $X \in [A]^{\lambda}$ akkor $|S_1^{\mathcal{A}}(X)| \leq \lambda$. Legyen tehát $\mathcal{A}$ és X ilyen. Ekkor (2) szerint minden p típusnak van X feletti definiáló sémája. Ezért $|S_1^{\mathcal{A}}(X)|$ legfeljebb akkora, amennyi X feletti definiáló séma van. Egy-egy ilyen definiáló séma egy $Form(L)$-en értelmezett és $Form(L_X)$-be képező függvény, ezért e definiáló sémák számossága legfeljebb $|^{Form(L)}Form(L_X)| = \lambda^{|Form(L)|} = \lambda$.

Tegyük most fel, hogy (3) igaz; (4)-hez azt kell megmutatni, hogy van olyan λ melyre T λ-stabil, azaz, hogy van olyan λ, mely eleget tesz (3) feltételeinek. Legyen κ tetszőleges végtelen számosság és legyen $\lambda = \kappa^{|Form(L)|}$. Ekkor $\lambda^{|Form(L)|} =$

$\kappa^{|Form(L)|^2} = \kappa^{|Form(L)|} = \lambda$.

Végül a 6.9 tétel (kontraponáltja) szerint (4)-ből következik (1). ∎

Fontossága miatt külön is kiemeljük, hogy ezek szerint stabil elméletek modelljeiben minden típus definiálható és ha egy elmélet stabil, akkor minden $\lambda = \lambda^{|Form(L)|}$ alakú számosságra λ-stabil.

Most rátérünk a 6.10 tétel igazolására. Ehhez szükségünk lesz arra, hogy megvizsgáljuk: stabil elméletek modelljeiben a rendezéseken kívül „mennyire interpretálható" néhány további kombinatorikus struktúra.

6.14. Definíció. *Legyen T egy elmélet, $\varphi(\bar{v}, \bar{w})$ egy formula a T nyelvén és legyen $n \in \omega$. Azt mondjuk, hogy φ (T-beli) kettős indexe legalább n (jelölés: $KI(\varphi(\bar{v}, \bar{w})) \geq n$), ha T-nek van olyan $\mathcal{A}$ modellje, melyben vannak $\bar{a}_0, ..., \bar{a}_{n-1}, \bar{b}_0, ..., \bar{b}_{n-1} \in A$ elemek, hogy minden $i, j \in n$-re teljesül a következő:*

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}_i, \bar{b}_j] \quad \Leftrightarrow \quad i \leq j.$$

Ha van olyan $n \in \omega$ melyre $KI(\varphi) \geq n$ de $KI(\varphi) \ngeq n+1$, akkor azt mondjuk, hogy φ kettős indexe pontosan n; ha ilyen n nincs, akkor φ kettős indexe végtelen.

6.15. Tétel. *Legyen T teljes és konzisztens elmélet az L nyelven. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens.*

(1) *T-nek van rendezőformulája.*

(2) *Van olyan L-formula, melynek végtelen a T-beli kettős indexe.*

Bizonyítás. Először tegyük fel (1)-et, és legyen φ T egy rendezőformulája. A 2.22 kompaktsági tétel szerint ekkor van olyan $\mathcal{A} \models T$ struktúra és ennek van olyan $\{\bar{a}_i, i \in \omega\} \subseteq A$ részhalmaza, hogy $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}_i, \bar{a}_j]$ akkor és csak akkor teljesül, ha $i < j$. Minden $i \in \omega$-ra legyen $\bar{b}_i = \bar{c}_{i+1} = \bar{a}_i$. Ekkor

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}_i, \bar{c}_i] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}_i, \bar{a}_{j+1}] \Leftrightarrow i < j+1 \Leftrightarrow i \leq j,$$

tehát a $\{\bar{b}_i, \bar{c}_i : i \in \omega, i > 0\}$ halmaz tanúsítja, hogy $KI(\varphi)$ végtelen.

Fordítva, tegyük most fel, hogy $KI(\varphi(\bar{v}, \bar{w}))$ végtelen. Ismét a 2.22 kompaktsági tétel miatt T-nek van olyan $\mathcal{A}$ modellje, melyben van egy $\{\bar{b}_i, \bar{c}_i : i \in \omega\} \subseteq A$ halmaz, hogy $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}_i, \bar{c}_j] \Leftrightarrow i \leq j$ teljesül. Minden $i \in \omega$-ra legyen $\bar{a}_i = \bar{b}_i{}^\frown\bar{c}_i$ és legyen $\phi(\bar{v}\bar{v}', \bar{w}\bar{w}') = \neg\varphi(\bar{w}, \bar{v}')$. Ekkor

$$\mathcal{A} \models \phi[\bar{a}_i, \bar{a}_j] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg\varphi[\bar{b}_j, \bar{c}_i] \Leftrightarrow j \nleq i \Leftrightarrow i < j.$$

Tehát ϕ rendezőformulája T-nek. ∎

A továbbiakban szükségünk lesz a (gyökeres) fák néhány kombinatorikus tulajdonságára. Legyen $k \leq n \leq \omega$. Ekkor az $f : {}^{k}2 \to {}^{n}2$ függvényt fahomomorfizmusnak nevezzük, ha „utat útba visz", azaz ha $\sigma, \eta \in {}^{\leq k}2$ akkor a $\sigma \subseteq \eta$ feltétel ekvivalens $f(\sigma) \subseteq f(\eta)$-val. Ez a feltétel tehát azt jelenti, hogy a σ csúcs pontosan akkor van rajta az η-ból a gyökérbe vezető úton, ha $f(\sigma)$ rajta van az $f(\eta)$-ból a gyökérbe vezető úton. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq {}^{\leq n}2$ halmaz egy k magasságú teljes részfa ${}^{\leq n}2$-ben, ha van olyan injektív $f : {}^{\leq k}2 \to {}^{\leq n}2$ fahomomorfizmus, melynek értékkészlete pontosan a H halmaz.

6.16. Lemma. *Színezzük pirossal és kékkel az $n+k$ szintű $T = {}^{\leq n+k}2$ teljes bináris fa csúcsait. Ekkor vagy van n szintű teljes piros részfa T-ben, vagy van k szintű teljes kék részfa T-ben.*

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazunk $n+k$-ra. Az $n+k=1$ eset triviális. Tegyük most fel, hogy $n+k$ szintű fákra igazoltuk már az állítást és legyen $T = {}^{\leq n+k+1}2$ egy teljes bináris fa, melynek két színnel színeztük a csúcsait. Tegyük még fel, hogy T gyökere piros (ha kék lenne, analóg módon lehetne érvelni). Legyen T_0 a T-nek a gyökértől balra levő csúcsaiból álló részfája, T_1 pedig a gyökértől jobbra levő csúcsokból álló részfa. Tehát T_0 és T_1 $n+k$ szintű fák. Ha T_0-ban vagy T_1-ben van teljes k szintű kék részfa, akkor készen vagyunk: ez a részfa T-ben is megfelelő. Ha ilyen kék részfa sem T_0-ban, sem T_1-ben nincs, akkor az indukciós feltevés szerint T_0-ban és T_1-ben is van teljes n szintű piros részfa. Ezek a piros részfák T piros gyökerével együtt T-ben egy teljes $n+1$ szintű piros részfát alkotnak. ∎

Az alábbiakban bináris fák elemeit fogjuk bizonyos struktúrák elemeivel, elemsorozataival színezni. Ha $\mathcal{A}$ egy struktúra, $\eta \in {}^{\leq n}2$ a ${}^{\leq n}2$ fa egy csúcsa, akkor $\bar{a}_\eta$ fogja jelölni e csúcs színét. Figyeljük meg, hogy itt az indexeknek van egy érdekes struktúrájuk, de különböző $\eta, \sigma \in {}^{\leq n}2$-re $\bar{a}_\eta, \bar{a}_\sigma$ ugyanolyan hosszú sorozatok.

6.17. Definíció. *Legyen T egy elmélet, $\varphi(\bar{v}, \bar{w})$ egy formula a T nyelvén és legyen $n \in \omega$. Azt mondjuk, hogy φ (T-beli) ágindexe legalább n (jelölés: $BI(\varphi(\bar{v}, \bar{w})) \geq n$), ha T-nek van olyan $\mathcal{A}$ modellje, melyben vannak $\{\bar{c}_\eta : \eta \in {}^{<n}2\}, \{\bar{b}_\eta : \eta \in {}^{n}2\} \subseteq A$ elemek, hogy minden $\eta \in {}^{n}2$-re és $i \in n$-re teljesül a következő:*

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{c}_{\eta|i}, \bar{b}_\eta] \quad \Leftrightarrow \quad \eta(i) = 1.$$

Az iménti feltételnek eleget tevő $\langle c_\eta, b_\sigma : \eta \in {}^{<n}2, \sigma \in {}^{n}2 \rangle$ színezett fát φ egy n-fájának nevezzük. Ha van olyan $n \in \omega$ melyre $BI(\varphi) \geq n$ de $BI(\varphi) \not\geq n+1$, akkor azt mondjuk, hogy φ ágindexe pontosan n; ha ilyen n nincs, akkor φ ágindexe végtelen.

Ezek szerint $BI(\varphi) \geq n$ pontosan azt jelenti, hogy φ-nek T egy alkalmas modelljében van n-fája. Legyen V a φ egy n-fája az $\mathcal{A}$ struktúrában, legyen ennek a fának

η egy nem-levél csúcsa, és legyen σ egy levél. Ekkor az előző definíció értelmében $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{c}_\eta, \bar{b}_\sigma]$ akkor és csak akkor áll fenn, ha az η csúcsból jobbra (azaz az „1" irányba) kell kanyarodni ahhoz, hogy a σ levélhez jussunk.

Most vegyük észre a következőt. Legyen V a φ egy n-fája, legyen H egy olyan teljes $k-1$ szintű részfa V-ben, mely V egyetlen levelét sem tartalmazza. Ha most H minden levele alatt jobbra és balra tetszőlegesen kiválasztjuk V 2-2 levelét, és ezekkel kibővítjük H-t, akkor ez a kibővítés φ egy k-fája lesz.

Legyen T teljes és konzisztens elmélet az L nyelven. Ekkor a $BI(\varphi) \geq n$ állítás kifejezhető az L nyelven: van olyan ψ formula, mely akkor és csak akkor következménye T-nek (vagy, ami T teljessége miatt ugyanaz: akkor és csak akkor eleme T-nek), ha $BI(\varphi) \geq n$. Ráadásul ψ-ben nincsenek szabadon előforduló változók.

Feladat. Legyen T teljes és konzisztens elmélet és legyen R kétváltozós relációszimbólum. Adjunk meg egy formulát, mely akkor és csak akkor igaz T minden modelljében (azaz akkor és csak akkor következménye T-nek), ha $BI(R(v,w)) \geq 2$.

6.18. Tétel. *Legyen T teljes és konzisztens elmélet. Ha egy φ formulára $BI(\varphi) \geq 2^{n+2}-1$ akkor $KI(\varphi) \geq n$. Speciálisan: ha minden formulának véges a T-beli kettős indexe, akkor minden formulának véges a T-beli ágindexe.*

Bizonyítás. Mivel $BI(\varphi) \geq 2^{n+2}-1$, van olyan $\mathcal{A} \models T$, melynek elemeit (elemsorozatait) használva elő tudjuk állítani φ-nek egy $2^{n+2}-1$-fáját, legyen ez V. Fontos lesz megkülönböztetni V leveleit és nem-leveleit. Ezért bevezetjük a következő konvenciót. Ha σ nem levél V-ben, akkor σ színét c_σ jelöli, ha η levél V-ben, akkor η színét b_η-val jelöljük. Teljes indukcióval meg fogjuk mutatni, hogy minden $r \leq n$-re létezik egy

$$(*) \qquad \bar{b}_0, \bar{c}_0, ..., \bar{b}_{q-1}, \bar{c}_{q-1}, K, \bar{b}_q, \bar{c}_q, ..., \bar{b}_r, \bar{c}_r$$

sorozat, melyre teljesülnek a következő feltételek.

(a) K a φ egy $2^{n+2-r}-1$-fája;

(b) $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}_i, \bar{c}_j] \Leftrightarrow i \leq j$ (azaz $\bar{b}_i$ pontosan a $(*)$ sorozatban nála hátrább levő $\bar{c}_j$-kkel van $\varphi^{\mathcal{A}}$ relációban);

(c) Ha η a K fa tetszőleges nem-levél csúcsa, akkor $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}_i, \bar{c}_\eta] \Leftrightarrow i < q$ (azaz K tetszőleges nem-levél csúcsainak színei pontosan azokkal a $(*)$-beli $\bar{b}_i$-kkel vannak $\varphi^{\mathcal{A}}$ relációban, melyek K-tól balra vannak);

(d) Ha η a K fa egy levele, akkor $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}_\eta, \bar{c}_j] \Leftrightarrow q \leq j$ (azaz K leveleinek színei pontosan azokkal a $(*)$-beli $\bar{c}_j$-kel vannak $\varphi^{\mathcal{A}}$ relációban, melyek $(*)$-ban K után következnek).

Állításunk $r=0$-ra igaz, mert ekkor a sorozatban csak egy fa szerepel, és a $K=V$ választás megfelelő. Figyeljük meg továbbá, hogy a (b) feltétel miatt $r=n$-re a

($*$) sorozatban szereplő $\bar{b}_i, \bar{c}_i$ elemek tanúsítják, hogy $KI(\varphi) \geq n$. Ezen kívül, a (c) és (d) feltételek azt mondják, hogy a ($*$)-ban szereplő nem-levél csúcsok színei lehetnek az 1-el nagyobb r-hez tartozó sorozatban a lehetséges „$\bar{c}$" elemek, míg K leveleinek színei a következő sorozat potenciális „$\bar{b}$" elemei: K nem-levél csúcsai és levelei pontosan úgy viselkednek a sorozat többi tagjával, mint a „K helyén lévő $\bar{b}$ és $\bar{c}$ elemek".

Tegyük most fel, hogy adott r-re igazoltuk már egy ($*$) alakú sorozat létezését, melyre (a)-(d) teljesül. K minden η levelére legyen $H(b_\eta) = \{\sigma : \mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}_\eta, \bar{c}_\sigma], \sigma$ nem-levél csúcsa K-nak $\}$. Két esetet különböztetünk meg.

Ha van olyan η levél K-ban, melyre $H(b_\eta)$ tartalmaz egy $2^{n+1-r}-1$-es teljes részfát, akkor legyen ez a részfa H', legyen $\bar{b}_q = \bar{b}_\eta$, legyen $\bar{c}_q$ H' gyökere és legyen H'' a H' gyökerétől balra lévő csúcsaiból álló részfa. Végül tetszőleges módon válasszunk H'' levelei alatt jobbra és balra 2-2 levelet K-ból, és bővítsük ki ezekkel H''-t. Az eredményül előálló fa legyen H'''. Most ($*$)-ban K helyére írjuk a $\bar{b}_\eta, \bar{c}_q, H'''$ sorozatot. Állítjuk, hogy az új sorozat kielégíti az (a)-(d) kikötések $r+1$-edik példányait. Ebből (a) világos: H''' a φ egy $2^{n+1-r}-1$-fája. A (b) feltételhez csak annyit kell átgondolnunk, hogy $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}_q, \bar{c}_q]$, ez viszont igaz, mert $\bar{c}_q \in H(\bar{b}_q)$; (b) többi kikötése az indukciós feltevések miatt igaz. Hasonlóan, (c) és (d) azért marad igaz, mert H''' levelei illetve nem-levelei egyúttal levelei illetve nem levelei K-nak, illetve, mert $\bar{c}_q \in H(\bar{b}_q)$ és mert $\bar{b}_q$-t H'''-től balra írtuk.

Tegyük most fel, hogy a $H(\bar{b}_\eta)$ halmazok K egyetlen η levelére sem tartalmaznak $2^{n+1-r}-1$-es teljes részfákat. Legyen $\bar{c}_q$ a K gyökere, legyen H' a K gyökértől jobbra lévő csúcsaiból álló részfája (tehát H' azokból a csúcsokból áll, melyekhez K-ban „1"-el kezdődő út vezet a gyökérből) és legyen $\bar{b}_q$ egy tetszőleges levél H'-ben. Színezzük H' egy σ nem-levél csúcsát pirosra, ha $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{c}_\sigma, \bar{b}_q]$; egyébként színezzük az illető csúcsot kékre. Feltevésünk szerint a H' nem-levél csúcsaiból álló színezett fa nem tartalmaz $2^{n+1-r}-1$-szintű teljes piros részfát. Ezért a 6.16 lemma szerint ez a fa tartalmaz egy $2^{n+2-r}-3-(2^{n+1-r}-1) = 2^{n+1-r}-2$-szintű teljes kék részfát, legyen ez H''. Végül H'' levelei alatt jobbra és balra tetszőlegesen válasszunk 2-2 levelet K-ból, vegyük ezeket a leveleket H''-höz, legyen az így kapott fa H'''. Most ($*$)-ban cseréljük ki K-t $H''', \bar{b}_q, \bar{c}_q$-ra. Az új sorozatra (a) nyilvánvalóan érvényben marad, (b)-ből megint azt fontos meggondolni, hogy $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}_q, \bar{c}_q]$. Ez most azért lesz igaz, mert $\bar{c}_q$ a K gyökere volt, $\bar{b}_q$-t pedig a gyökérből jobbra kanyarodó úttal érhetjük el (mivel $\bar{b}_q$ a H' egy levele). Megint, (c) és (d) azért marad igaz, mert H''' levelei illetve nem-levelei egyúttal levelei illetve nem levelei K-nak, illetve, mert H'' kék színű részfa és mert $\bar{c}_q$-t H'''-től jobbra írtuk.

Ezzel az indukciós lépés kész, ami korábbi megjegyzéseink szerint adja a tétel igazolását is. ∎

Feladat. Igazoljuk a 6.18 tétel megfordítását: ha egy teljes és konzisztens elméletben minden formulának véges az ágindexe, akkor minden formulának véges a kettős indexe is.

Legyen most T egy teljes és konzisztens elmélet, legyen $\mathcal{A} \models T$ egy struktúra, legyen $\varphi(\bar{v}, \bar{w})$ egy formula $\mathcal{A}$ nyelvén és legyen $\psi(\bar{v})$ olyan formula, melyben esetleg további, A elemeit jelölő konstanszimbólumok is szerepelnek (amelyek tehát $\mathcal{A}$ nyelvében nem feltétlenül fordulnak elő). $BI(\varphi, \psi) \geq n$ jelentse azt, hogy $\mathcal{A}$-ban φ-nek van olyan n-fája, melynek minden levele kielégíti ψ-t. Világos, hogy minden formulapárra $BI(\varphi, \psi) \leq BI(\varphi, v = v) \leq BI(\varphi)$, ezért ha φ-nek T szerint véges az ágindexe, akkor minden ψ-re $BI(\varphi, \psi)$ is véges lesz $\mathcal{A}$ minden elemi bővítésében.

6.19. Lemma. *Legyen T teljes és konzisztens elmélet, és tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \models T$, $\bar{c} \in A$ és $BI(\varphi(\bar{v}, \bar{w}), \psi(\bar{v})) = n$. Ekkor*

$$BI(\varphi(\bar{v}, \bar{w}), \psi(\bar{v}) \wedge \varphi(\bar{c}, \bar{v})) < n \qquad \textit{vagy} \qquad BI(\varphi(\bar{v}, \bar{w}), \psi(\bar{v}) \wedge \neg\varphi(\bar{c}, \bar{v})) < n.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $BI(\varphi(\bar{v}, \bar{w}), \psi(\bar{v}) \wedge \varphi(\bar{c}, \bar{v})) \geq n$ és $BI(\varphi(\bar{v}, \bar{w}), \psi(\bar{v}) \wedge \neg\varphi(\bar{c}, \bar{v})) \geq n$. Ezek szerint φ-nek vannak olyan n-fái (legyenek ezek V_0 és V_1), hogy V_0 minden levele $\mathcal{A}$-ban kielégíti $\psi(\bar{v}) \wedge \neg\varphi(\bar{c}, \bar{v})$-t és V_1 minden levele kielégíti $\psi(\bar{v}) \wedge \varphi(\bar{c}, \bar{v})$-t. Legyen V az a fa, melynek gyökerét $\bar{c}$-vel színezzük, a gyökértől balra V_0 szerepel, a gyökértől jobbra pedig V_1. Ekkor V magassága legalább $n + 1$; megmutatjuk, hogy V a φ egy $n + 1$-fája, melynek minden levele kielégíti ψ-t.

V minden levele vagy V_0-nak vagy V_1-nek levele, ezért V minden levele kielégíti ψ-t. Végül, ha σ V-nek a gyökértől balra található levele, akkor σ egyben V_0 egy levele is, ezért $\mathcal{A} \not\models \varphi[\bar{c}, \bar{b}_\sigma]$. Hasonlóan, ha σ a V egy gyökértől jobbra található levele, akkor $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{c}, \bar{b}_\sigma]$.

Ezek szerint V tanúsítja, hogy $BI(\varphi, \psi) \geq n + 1$, ellentmondva feltételeinknek. ∎

Most már minden készen áll ahhoz, hogy igazoljuk a 6.10 tételt.

Bizonyítás. Emlékeztetünk rá, hogy feltevéseink szerint T olyan teljes és konzisztens elmélet, melynek nincs rendezőformulája, $\mathcal{A} \models T, X \subseteq A$ és $R \subseteq {}^nA$ olyan reláció, mely A-beli paraméterekkel definiálható, mondjuk a φ formulával és $\bar{b} \in A$ konstansokkal $R = \{\bar{x} \in {}^nA : \mathcal{A} \models \varphi(\bar{x}, \bar{b})\} = ||\varphi(\bar{v}, \bar{b})||^{\mathcal{A}}$. Meg kell mutatnunk, hogy van egy $\phi(\bar{v}, \bar{w})$ formula és vannak $\bar{c} \in X$ konstansok, melyekre ${}^nX \cap R = {}^nX \cap ||\phi(\bar{v}, \bar{c})||^{\mathcal{A}}$.

T-ben nincs rendezőformula ezért a 6.15 tétel miatt minden formulának véges a kettős indexe, sőt a 6.18 tétel miatt az ágindexe is. Legyen $p = tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}/X)$ és legyen $\psi(\bar{v}, \bar{c}) \in p$ olyan formula, melyre $BI(\varphi, \psi)$ minimális, mondjuk m. Legyen végül $\phi(\bar{y})$ az a formula, mely a következőt fejezi ki: „$\bar{y}$ olyan elemek sorozata, hogy $BI(\varphi(\bar{v}, \bar{w}), \psi(\bar{v}, \bar{c}) \wedge \varphi(\bar{y}, \bar{v})) \geq m$". Ez tényleg kifejezhető egy olyan formulával melyben legfeljebb X elemei fordulnak elő paraméterként. A bizonyítás befejezéseképpen megmutatjuk, hogy ϕ X-en vett nyoma megegyezik R X-beli nyomával.

Először tegyük fel, hogy $\bar{s} \in R \cap {}^nX$. Ekkor $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{s}, \bar{b}]$ azaz $\varphi(\bar{s}, \bar{v}) \in p$. Ezért $\psi(\bar{v}, \bar{c}) \wedge \varphi(\bar{s}, \bar{v}) \in p$ és ψ választása miatt $BI(\varphi(\bar{v}, \bar{w}), \psi(\bar{v}, \bar{c}) \wedge \varphi(\bar{s}, \bar{v})) \geq m$ azaz $\mathcal{A} \models \phi[\bar{s}]$. Ezzel beláttuk, hogy $R \cap {}^nX \subseteq ||\phi||^{\mathcal{A}} \cap {}^mX$.

Fordítva, tegyük most fel, hogy $\bar{s} \notin R \cap {}^nX$, ekkor $\mathcal{A} \not\models \varphi[\bar{s}, \bar{b}]$ azaz $\mathcal{A} \models \neg\varphi[\bar{s}, \bar{b}]$ tehát $\psi(\bar{v}, \bar{c}) \wedge \neg\varphi(\bar{s}, \bar{v}) \in p$. Ezért ismét ψ választása miatt $BI(\varphi(\bar{v}, \bar{w}), \psi(\bar{v}, \bar{c}) \wedge \neg\varphi(\bar{s}, \bar{v})) \geq m$. Emiatt a 6.19 lemma értelmében $BI(\varphi(\bar{v}, \bar{w}), \psi(\bar{v}, \bar{c}) \wedge \varphi(\bar{s}, \bar{v})) < m$ és így $\mathcal{A} \not\models \phi[\bar{s}]$ azaz $s \notin ||\phi||^{\mathcal{A}}$.

Az utolsó két bekezdés szerint tetszőleges $\bar{s} \in {}^nX$-re $\bar{s} \in R$ és $\bar{s} \in ||\phi||^{\mathcal{A}}$ ekvivalensek, ahogy állítottuk. ∎

6.2. $\aleph_1$-kategorikus elméletek

A stabil elméletek további vizsgálatával folytatjuk a fejezetet. Többek között igazoljuk majd, hogy az $\aleph_0$-stabil elméleteknek vannak szaturált modelljei. Bevezetjük a kétszámosságtételek fogalmát, és példát mutatunk egy kétszámosságtételre. Ennek segítségével igazoljuk majd a felszálló Morley-tételt: ha egy megszámlálható elmélet $\aleph_1$-kategorikus, akkor minden $\kappa > \aleph_0$-ra κ-kategorikus. Ezután stabil elméletek atomos modelljeinek egzisztenciáját igazoljuk és segítségükkel bizonyítjuk a teljes Morley-tételt: egy megszámlálható nyelvű elmélet akkor és csak akkor $\aleph_1$-kategorikus, ha az összes nem-megszámlálható κ számosságon κ-kategorikus.

Azzal kezdjük, hogy kapcsolatot teremtünk a nem-megszámlálható kategoricitás és a stabilitás között.

6.20. Tétel. *Legyen L megszámlálható nyelv, legyen $\lambda \geq \aleph_1$ és legyen T egy λ-kategorikus elmélet az L nyelven. Ekkor T $\aleph_0$-stabil.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben T nem $\aleph_0$-stabil; meg fogjuk konstruálni T két, nem izomorf λ számosságú modelljét.

A 4.12 tétel miatt van olyan λ számosságú $\mathcal{A} \models T$ struktúra, hogy minden $X \in [A]^{\aleph_0}$-ra $\mathcal{A}$-ban csak megszámlálható sok X feletti típus realizálható.

Feltevésünk szerint T nem $\aleph_0$-stabil, ezért van olyan $\mathcal{B} \models T$ és $X \in [B]^{\aleph_0}$, hogy $|S_1^{\mathcal{B}}(X)| \geq \aleph_1$; válasszunk ki tetszőleges módon $\aleph_1$ darab ilyen típust: legyen ez $Q = \{p_i : i \in \omega_1\} \subseteq S_1^{\mathcal{B}}(X)$. Legyen $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ egy λ^+-szaturált elemi bővítése, és minden $i \in \omega_1$-re legyen $c_i \in C$ egy p_i-t realizáló elem. Mivel $\mathcal{C}$ λ^+-szaturált, $|C| \geq \lambda^+$. Végül legyen $\mathcal{D}$ egy $X \cup \{c_i : i \in \omega_1\}$-et tartalmazó, λ számosságú elemi rész $\mathcal{C}$-ben.

Ekkor $\mathcal{D}$-ben Q minden eleme realizálható, tehát $\mathcal{D}$-ben van egy megszámlálható halmaz (ez X), mely felett legalább $\aleph_1$ darab típus realizálható $\mathcal{D}$-ben. Emiatt $\mathcal{A}$ és $\mathcal{D}$ nem lehetnek izomorfak, azaz T nem lehet λ-kategorikus. ∎

Feladatok. 1. Igazoljuk, hogy az előző tétel nem fordítható meg: adjunk példát $\aleph_0$-stabil elméletre, mely nem $\aleph_1$-kategorikus.
2 Adjunk példát $\aleph_0$-stabil, de nem teljes elméletre.

6.21. Tétel. *Legyen L egy nyelv, legyen ebben T egy $\aleph_0$-stabil elmélet, melynek vannak végtelen modelljei.*

(1) Ha $\kappa \geq |Form(L)|$ reguláris számosság, akkor T-nek van κ számosságú szaturált modellje.

(2) Ha $\lambda \geq \kappa \geq |Form(L)|$, κ reguláris számosság, akkor T-nek van λ számosságú κ-szaturált modellje.

Bizonyítás. A $\lambda = \kappa$ választással (2)-ből következik (1), ezért elég (2)-t igazolni. Legyen κ és λ rögzített. A 2.43 (2) tétel szerint T-nek van egy legalább λ számosságú κ^+-szaturált $\mathcal{A}$ modellje. Legyen $\mathcal{A}_0$ ennek egy λ számosságú elemi része. Tegyük fel, hogy $\mu \le \kappa$ és definiáltuk már $\mathcal{A}$ λ számosságú elemi részeinek egy $\langle \mathcal{A}_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ elemi láncát. Ha μ limeszrendszám, akkor legyen $\mathcal{A}_\mu = \cup_{\alpha\in\mu}\mathcal{A}_\alpha$, ha μ rákövetkező, mondjuk $\mu = \nu+1$, akkor $\mathcal{A}$-ban realizáljunk minden A_ν feletti típust. Mivel feltételeink szerint $|A_\nu| = \lambda$ és T $\aleph_0$-stabil, ezért a 6.3 (3) tétel miatt ez összesen λ darab típus realizálását jelenti. A realizáló elemeket vegyük hozzá A_ν-höz, és generáljunk $\mathcal{A}$-ban ezzel a bővebb halmazzal egy λ számosságú elemi részt; ez legyen $\mathcal{A}_\mu$.

A konstrukció miatt minden $\alpha < \kappa$-ra $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ κ-szaturált (sőt, κ^+-szaturált) $\mathcal{A}_\alpha$ felett. Ezért a 2.43 (1) tétel szerint $\mathcal{A}_\kappa$ egy κ-szaturált modellje T-nek, és a konstrukció miatt $|A_\kappa| \le \Sigma_{\alpha\in\kappa}|A_\alpha| \le \lambda \cdot \kappa = \lambda$ vagyis $\mathcal{A}_\kappa$ a keresett κ-szaturált modell. ∎

Legyen T egy elmélet az L nyelven, és tegyük fel, hogy R egy 1-változós relációszimbólum L-ben. Ha T-nek van olyan $\mathcal{A}$ modellje, melyben $R^\mathcal{A}$ végtelen, akkor $\mathcal{A}$ egy $|A|$-reguláris ultraszűrő szerinti $\mathcal{B}$ ultrahatványa a 2.29 tétel miatt $2^{|A|}$ számosságú lesz, és $|R^\mathcal{B}| = 2^{|A|}$ is teljesül (szintén a 2.29 tétel miatt). A kétszámosság-tételek arra adnak elegséges feltételeket, hogy T-nek mikor vannak olyan modelljei, melyek alaphalmaza nagyobb számosságú, mint R interpretációja.

Morley tételének igazolásához szükségünk lesz egy kétszámosság-tételre is.

6.22. Lemma. *Legyen L megszámlálható nyelv, T egy elmélet L-ben és legyen R egy 1-változós relációszimbólum. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ megszámlálható struktúrák, $\mathcal{A}$ valódi elemi rész $\mathcal{B}$-ben és $R^\mathcal{A} = R^\mathcal{B}$. Ekkor vannak olyan $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ struktúrák, melyekre teljesülnek a következők:*

(o) *$\mathcal{B}$ elemi rész $\mathcal{D}$-ben,*
(i) $\mathcal{C}, \mathcal{D} \models T$,
(ii) $|C| = |D| = \aleph_0$,
(iii) *$\mathcal{C}$ valódi elemi rész $\mathcal{D}$-ben,*
(iv) $R^\mathcal{C} = R^\mathcal{D}$,
(v) $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$,
(vi) *$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ erősen $\aleph_0$-homogén.*

Bizonyítás. Shelah izomorfizmustétele (a 2.58 tétel) szerint van olyan I halmaz és U ultraszűrő I felett, hogy $\mathcal{A}^* = {}^I\mathcal{A}/U$ és $\mathcal{B}^* = {}^I\mathcal{B}/U$ izomorf. A 2.43 (3) tétel szerint van olyan $\mathcal{B}^*$-ból induló ultralánc, melynek limesze erősen $\aleph_0$-homogén. Legyen ez a limesz $\mathcal{B}'$, és legyen $\mathcal{A}'$ annak az $\mathcal{A}^*$-ból induló ultraláncnak a limesze, melyben a rákövetkező rendszámokhoz tartozó struktúrákat mindig a $\mathcal{B}'$-höz tartozó lánc megfelelő ultraszűrői szerinti ultrahatványozással kapjuk. Ekkor $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$ izomorfak lesznek, legyen $f : B' \to A'$ egy izomorfizmus köztük. Ugyanakkor, mivel A valódi részhalmaza B-nek, $\mathcal{A}^*$ valódi részstruktúrája $\mathcal{B}^*$-nak (illetve $\mathcal{A}'$ is $\mathcal{B}'$-nek). Legyen $\mathcal{B}'' = \langle \mathcal{B}', \mathcal{A}', f \rangle$. Ebben a struktúrában tehát A' egy 1-változós alapreláció, legyen a neki megfelelő új (L-en kívüli) relációszimbólum A.

$\mathcal{B}'$ erősen $\aleph_0$-homogén. Ez azt jelenti, hogy ha $\bar{a}, \bar{b} \in B'$ azonos típusú véges sorozatok, akkor $\mathcal{B}'$-nek van egy $\bar{a}$-t $\bar{b}$-re képező $f_{\bar{a},\bar{b}}$ automorfizmusa. Minden

$n \in \omega, n > 0$-ra legyen $R_n \subseteq {}^{2n+2}B'$ a következő reláció.

$$R_n = \{\langle \bar{a}, \bar{b}, c, d\rangle : \ tp^{\mathcal{B}'}(\bar{a}/\emptyset) = tp^{\mathcal{B}'}(\bar{b}/\emptyset), \ f_{\bar{a},\bar{b}}(c) = d\}.$$

Legyen végül $\mathcal{E}$ a $\langle \mathcal{B}'', R_n\rangle_{n\in\omega, n>0}$ struktúra egy B-t tartalmazó megszámlálható elemi része. Legyen még $\mathcal{D}$ az $\mathcal{E}$ L-reduktuma, és legyen $\mathcal{C}$ az az L-típusú részstruktúra $\mathcal{E}$-ben, melynek alaphalmaza $A^{\mathcal{E}}$. Ekkor $(o), (i)$ és (ii) nyilvánvalóan teljesül. Továbbá (iii) is teljesül, mert $\mathcal{B}^*$-ban igaz, hogy $\mathcal{A}^*$ valódi elemi rész, és ezt a többi elemi bővítés és elemi rész-képzés megőrzi. Hasonlóan, $R^{\mathcal{A}'} = R^{\mathcal{B}'}$ és az elemi bővítések, elemi rész-képzések miatt (iv) igaz lesz. Továbbá $f^{\mathcal{E}}$ egy izomorfizmus $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ között, ezért (v) is teljesül. Végül (v) miatt (vi)-hoz elég meggondolni, hogy $\mathcal{D}$ erősen $\aleph_0$-homogén. Ez azért van így, mert ha $\bar{a}, \bar{b} \in D$ azonos típusú sorozatok, akkor $tp^{\mathcal{B}'}(\bar{a}/\emptyset) = tp^{\mathcal{B}'}(\bar{b}/\emptyset)$ és emiatt az $\bar{a}, \bar{b}$ paraméterekkel $\mathcal{B}''$-ben az R_n relációk segítségével definiálható az $f_{\bar{a},\bar{b}}$ automorfizmus. Ezért $\mathcal{E}$-ben is definiálható egy olyan függvény, mely $\bar{a}$-t $\bar{b}$-re képezi, és amely automorfizmusa $\mathcal{E}|_L$-nek. Ez az automorfizmus tanúsítja, hogy $\mathcal{D}$ valóban erősen $\aleph_0$-homogén. ∎

6.23. Lemma.

(1) Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ olyan megszámlálhatóan végtelen, elemien ekvivalens, erősen $\aleph_0$-homogén struktúrák, melyekben minden $n \in \omega$-ra ugyanazok az ($\emptyset$ feletti) n-típusok realizálhatók, akkor $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

(2) Ha η megszámlálható rendszám és $\langle \mathcal{A}_\alpha : \ \alpha < \eta\rangle$ erősen $\aleph_0$-homogén és megszámlálhatóan végtelen struktúrák egy elemi lánca, akkor a lánc limesze is erősen $\aleph_0$-homogén.

Bizonyítás. (1) igazolásához soroljuk fel struktúráink elemeit: $A = \{a_n : n \in \omega\}$ és $B = \{b_n : n \in \omega\}$. Tegyük fel, hogy minden $m \leq k$-ra megadtuk már véges f_m elemi leképezések egy növő sorozatát, úgy, hogy f_m értelmezési tartománya tartalmazza már $a_0, ..., a_{m-1}$-et és értékkészlete tartalmazza már $b_0, ..., b_{m-1}$-et.

Legyen $p = tp^{\mathcal{A}}(dom(f_k)^\frown a_k/\emptyset)$. Feltevésünk szerint p realizálható $\mathcal{B}$-ben, mondjuk a $\langle \bar{c}, d\rangle$ sorozat realizálja p-t. Mivel $\mathcal{B}$ erősen $\aleph_0$-homogén, van olyan g automorfizmusa $\mathcal{B}$-nek, mely $\bar{c}$-t $range(f_k)$-ra képezi. Terjesszük ki f_k-t úgy, hogy a kiterjesztés (melyet jelöljünk f'_k-vel) képezze a_k-t $g(d)$-re.

Most alkalmazzuk az előző bekezdésben leírtakat f'_k inverzére, hogy b_k benne legyen a kiterjesztés értékkészletében. Ez a kiterjesztés legyen f_{k+1}. Végül legyen $f = \cup_{k\in\omega} f_k$, ez lesz a keresett izomorfizmus.

(2) igazolásához legyen A a láncunk limesze, és soroljuk fel A-t: $A = \{a_n : n \in \omega\}$. Tegyük fel, hogy $\bar{a}, \bar{b} \in A$ azonos típusú sorozatok. Legyen f_0 az a véges elemi leképezés, mely $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be viszi. Meg kell adjuk $\mathcal{A}$ egy automorfizmusát, mely kiterjeszti f_0-t. Tegyük ismét fel, hogy minden $m \leq k$-ra megadtuk már véges f_m elemi leképezések egy növő sorozatát úgy, hogy f_m értelmezési tartománya és értékkészlete is tartalmazza $a_0, ..., a_{m-1}$-et.

Mivel A egy lánc limesze, van olyan $\alpha < \eta$, melyre teljesül, hogy $dom(f_k)$, $range(f_k) \subseteq A_\alpha, a_k \in A_\alpha$. Mivel $\mathcal{A}_\alpha$ egy erősen $\aleph_0$-homogén elemi rész A-ban, van olyan g automorfizmusa, mely kiterjeszti f_k-t. Legyen f_{k+1} g egy olyan véges része, mely tartalmazza f_k-t és értelmezési tartománya és értékkészlete is tartalmazza a_k-t. Végül legyen $f = \cup_{k\in\omega} f_k$, ez lesz A-nak az f_0-t kiterjesztő automorfizmusa. ∎

6.24. Tétel. *(Kétszámosság-tétel.)*
Legyen L egy megszámlálható nyelv, legyen R egy 1-változós relációszimbólum L-ben és legyen T egy teljes elmélet L-ben. Ha T-nek vannak olyan megszámlálhatóan végtelen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ modelljei, hogy $\mathcal{A}$ valódi elemi része $\mathcal{B}$-nek, és $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}}$ akkor T-nek van olyan $\mathcal{C}$ modellje, melyre $|C| = \aleph_1$ de $|R^{\mathcal{C}}| \leq \aleph_0$ (sőt $R^{\mathcal{C}} = R^{\mathcal{B}}$) és melynek $\mathcal{B}$ elemi része.

Bizonyítás. A 6.22 lemma miatt feltehetjük, hogy $\mathcal{A}$-ra és $\mathcal{B}$-re teljesülnek az ott megadott $(o) - (vi)$ tulajdonságok is (úgy értve, hogy az eredeti $\mathcal{B}$ elemi része az új $\mathcal{B}$-nek). Legyen $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}$. Meg fogjuk adni T modelljeinek egy szigorúan növő $\langle \mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ elemi láncát úgy, hogy minden $\alpha < \omega_1$-re

(a) $\mathcal{A}_\alpha$ egy erősen $\aleph_0$-homogén megszámlálhatóan végtelen struktúra;
(b) $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}_\alpha$ izomorfak;
(c) $R^{\mathcal{A}_\alpha} = R^{\mathcal{A}}$

(ez utóbbi egyenlőséget úgy értjük, hogy a két megadott reláció azonos halmaz !).

Tegyük fel, hogy $\beta < \omega_1$ és minden $\gamma < \beta$-ra megadtuk már $\mathcal{A}_\gamma$-t. Ha β limeszrendszám, akkor legyen $\mathcal{A}_\beta = \cup_{\gamma<\beta} \mathcal{A}_\gamma$. Ekkor az 1.18 tétel miatt $\mathcal{A}_\beta$ valóban T egy megszámlálható modellje lesz, amire (c) nyilván teljesül, (a) pedig a 6.23 (2) lemma miatt marad igaz. Végül belátjuk, hogy $\mathcal{A}$-ban és $\mathcal{A}_\beta$-ban ugyanazok a típusok realizálhatók. Mivel $\mathcal{A}_\beta$ elemi bővítése $\mathcal{A}$-nak, ezért ha $n \in \omega$ és $p \in S_n(T)$ realizálható $\mathcal{A}$-ban, akkor p realizálható $\mathcal{A}_\beta$-ban is. Fordítva, ha egy $p \in S_n(T)$-t $\mathcal{A}_\beta$-ban realizálja a $\bar{c}$ véges sorozat, akkor van olyan $\gamma < \beta$, hogy $\bar{c} \in A_\gamma$, vagyis p $\mathcal{A}_\gamma$-ban is realizálható. De ekkor (b) γ-ra vonatkozó példánya miatt p realizálható $\mathcal{A}$-ban is. Ezért a 6.23 (1) lemma miatt (b) is teljesül $\mathcal{A}_\beta$-ra is.

Most tegyük fel, hogy $\beta = \gamma + 1$ rákövetkező rendszám. Ekkor $\mathcal{A}_\gamma$ izomorf $\mathcal{A}$-val, és tudjuk, hogy $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$ olyan megszámlálható valódi elemi bővítése, mely egyrészt izomorf $\mathcal{A}$-val, másrészt $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}}$. Ezért $\mathcal{A}_\gamma$-nak is van ilyen valódi elemi bővítése, ez legyen $\mathcal{A}_\beta$. Megint, $\mathcal{A}_\beta$ egy megszámlálható modellje T-nek, és világos, hogy (b) és (c) teljesül. Végül (a) azért lesz igaz, mert $\mathcal{A}_\beta \cong \mathcal{A}$ és ez utóbbi struktúra erősen $\aleph_0$-homogén.

Legyen végül $\mathcal{C}$ az $\langle \mathcal{A}_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ elemi lánc limesze. Világos, hogy az 1.18 tétel miatt $\mathcal{C} \models T$. Továbbá minden $\gamma \in \omega_1$-re $\mathcal{A}_{\gamma+1}$ valódi bővítése $\mathcal{A}_\gamma$-nak, ezért $|C| \geq \aleph_1$. Ugyanakkor $|C| \leq \Sigma_{\beta<\omega_1} |A_\beta| \leq \aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1$, ezért $|C| = \aleph_1$. Végül (c) miatt $R^{\mathcal{C}} = R^{\mathcal{A}}$ ezért $|R^{\mathcal{C}}| \leq |A| = \aleph_0$, valamint $\mathcal{A}_0$ választása miatt az eredeti $\mathcal{B}$

elemi rész $\mathcal{C}$-ben. ∎

Most már rátérhetünk Morley tételének igazolására.

6.25. Tétel. *(Felszálló Morley-tétel.)*
Legyen L megszámlálható nyelv és legyen T egy $\aleph_1$-kategorikus elmélet L-en.
(1) T minden nem-megszámlálható modellje szaturált.
(2) Minden $\kappa > \aleph_0$-ra T κ-kategorikus.

Bizonyítás. A Łoś-Vaught teszt (5.5 tétel) miatt T teljes elmélet, ezért a szaturált modellek 2.44 unicitástétele miatt (1)-ből következik (2).

(1) igazolásához figyeljük meg, hogy a 6.20 tétel miatt T $\aleph_0$-stabil, ezért a 6.21 tétel miatt T-nek van $\aleph_1$ számosságú szaturált modellje. Azonban T $\aleph_1$-kategorikus, ezért T-nek minden $\aleph_1$ számosságú modellje szaturált.

Legyen most $\mathcal{A} \models T$, $|A| > \aleph_0$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{A}$ szaturált. Ehhez legyen $X \subseteq A, |X| < |A|$ és $p \in S_1^{\mathcal{A}}(X)$ tetszőleges, azt kell igazolnunk, hogy p realizálható $\mathcal{A}$-ban; feltehetjük, hogy X végtelen. Először kibővítjük $\mathcal{A}$ nyelvét úgy, hogy egyetlen formulával ki tudjuk fejezni, hogy egy elem p-t realizálja.

A 6.13 tétel szerint a p típus X felett definiálható, legyen egy definiáló sémája a $\varphi \mapsto \partial\varphi$ megfeleltetés. Legyen $F \in [X]^\omega$ tetszőleges megszámlálhatóan végtelen halmaz, mely tartalmazza a p definiáló sémájában előforduló összes konstanst (ilyen megszámlálható F van, mert L is megszámlálható) és legyen $f : Form(L_F) \to F$ egy bijekció. Ezzel minden L_F-beli formulát „kódoltunk" F egy elemével. Legyen minden $n \in \omega$-ra $g_n : {}^nX \to X$ egy bijekció. Ha g_n változóinak számát nem akarjuk hangsúlyozni, akkor g_n helyett g-t írunk. Végül legyen

$$D = \{\langle f(\varphi), f(\partial\varphi)\rangle \in {}^2A : \varphi \in Form(L)\},$$

$$S = \{\langle f(\psi), g(\bar{c})\rangle \in {}^2A : \mathcal{A} \models \psi(\bar{c}), \psi \in Form(L_F)\},$$

$$M = \{\langle f(\varphi), g(\bar{c}), a\rangle \in {}^3A : \varphi \in Form(L), \bar{c} \in X \text{ és } \mathcal{A} \models \varphi(v, \bar{c})[a]\ \}$$

és legyen $\mathcal{A}^+ = \langle \mathcal{A}, X, F, D, S, M, g_n\rangle_{n\in\omega}$. Ebben a struktúrában egyetlen formulával ki tudjuk fejezni, hogy egy $a \in A$ realizálja p-t, hiszen a akkor és csak akkor realizálja p-t, ha

$$\begin{array}{llll} \text{minden } \varphi(v,\bar{c}) \in Form(L_X)\text{-re} & \mathcal{A} \models \varphi(a,\bar{c}) \ \Leftrightarrow\ \varphi(v,\bar{c}) \in p & & \text{azaz} \\ \text{minden } \varphi(v,\bar{c}) \in Form(L_X)\text{-re} & \mathcal{A} \models \varphi(a,\bar{c}) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{A} \models \partial\varphi[\bar{c}] & & \end{array}$$

és ez $\mathcal{A}^+$ nyelvén formalizálható:

$$\Phi(a) := (\forall x \in F)(\forall z \in X)(M(x,z,a) \Leftrightarrow (\forall y)(D(x,y) \Rightarrow S(y,z))$$

akkor és csak akkor igaz $\mathcal{A}^+$-ban, ha a realizálja p-t. Legyen $\mathcal{B}$ egy X-et tartalmazó, $|X|$ számosságú elemi rész $\mathcal{A}^+$-ban. Mivel $|X| < |A|$, van egy $h \in A - B$ elem, legyen $\mathcal{B}'$ egy $B \cup \{h\}$-t tartalmazó elemi rész $\mathcal{A}^+$-ban. Mivel $X \subseteq B$, ezért $X^{\mathcal{B}} = X^{\mathcal{B}'}$, ugyanakkor a konstrukció miatt $\mathcal{B}'$ valódi elemi bővítése $\mathcal{B}$-nek. Legyen most $\mathcal{D}$ az a struktúra, melyet $\mathcal{B}'$-ből úgy kapunk, hogy $\mathcal{B}$ alaphalmazát, relációit, függvényeit egy-egy alkalmas új névvel mind hozzávesszük $\mathcal{B}'$ nyelvéhez. Állapodjunk meg abban, hogy a B alaphalmazának megfelelő relációt $B^{\mathcal{D}}$-vel jelöljük. $\mathcal{D}$ egy $\mathcal{E}$ elemi részében az ennek megfelelő relációt értelemszerűen $B^{\mathcal{E}}$ jelöli majd. Ugyanezt a konvenciót fogjuk alkalmazni $\mathcal{D}$ többi relációjára is.

Legyen $\mathcal{D}_0$ egy F-t tartalmazó megszámlálható elemi rész $\mathcal{D}$-ben, legyen $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_0$ $\mathcal{A}^+$-típusú redukutuma és legyen $\mathcal{D}_2$ az az $\mathcal{A}^+$ típusú struktúra, melyet $\mathcal{D}_0$-ban $B^{\mathcal{D}_0}$ generál (vagy, ami ugyanaz, feszít). A konstrukció miatt $\mathcal{D}_1 \equiv_e \mathcal{D}_2$ megszámlálható struktúrák, melyekre $X^{\mathcal{D}_1} = X^{\mathcal{D}_2}$. Ezért a 6.24 kétszámosság-tétel miatt $\mathcal{D}_2$-nek van olyan $\mathcal{D}_3$ elemi bővítése, melyre $|D_3| = \aleph_1$ és $X^{\mathcal{D}_3} = X^{\mathcal{D}_2}$ és ezért persze $|X^{\mathcal{D}_3}| \leq \aleph_0$. Most legyen q a ∂ séma által definiált $X^{\mathcal{D}_3}$ feletti típus $\mathcal{D}_3$-ban. Világos, hogy q valóban egy típus (mert az, hogy a ∂ által $X^{\mathcal{D}_3}$ felett definiált formulahalmaz maximális és konzisztens, kifejezhető $\mathcal{A}^+$ nyelvén). Mivel $F \subseteq X^{\mathcal{D}_0} = X^{\mathcal{D}_3}$, és $\mathcal{A}^+$-ból indulva csupa elemi bővítéssel, elemi részképzéssel származtattuk $\mathcal{D}_3$-t, ezért a Φ formula $\mathcal{D}_3$-ban is pontosan a q-t realizáló elemekre igaz. Ugyanakkor $\mathcal{D}_3|_L \models T$ ami a bizonyítás legelső bekezdése szerint egy szaturált modellje T-nek, ezért van egy $a \in D_3$, mely realizálja a megszámlálható q-t. Ezek szerint $\mathcal{D}_3$-ban igaz a $\exists a \Phi(a)$ formula. Ezért ugyanez a formula a $\mathcal{D}_3$-al elemien ekvivalens $\mathcal{A}^+$-ban is igaz. Ez viszont pont azt jelenti, hogy p realizálható $\mathcal{A}$-ban, vagyis, hogy állításunknak megfelelően $\mathcal{A}$ szaturált struktúra. ∎

Következő célunk igazolni a Leszálló Morley-tételt: ha egy megszámlálható elmélet κ-kategorikus valamely $\kappa > \aleph_0$-ra, akkor T $\aleph_1$-kategorikus. Megint szükségünk lesz néhány előkészületi lépésre.

6.26. Definíció. *Legyen A tetszőleges halmaz. A $h : {}^{<\omega}2 \to \mathcal{P}(A)$ függvényt Hausdorff-sémának nevezzük, ha minden $s \in {}^{<\omega}2$-ra és $a \in 2$-re teljesülnek a következők:*

$$h(s) \neq \emptyset,$$
$$h(s^\frown a) \subseteq h(s),$$
$$h(s^\frown 0) \cap h(s^\frown 1) = \emptyset.$$

Ha $X = \langle A, \tau \rangle$ topologikus tér és h értékkészlete csupa nyílt halmazból áll, akkor nyílt Hausdorff-sémáról beszélünk majd. Hasonlóan használjuk a zárt, kompakt, stb. Hausdorff-séma elnevezéseket is. Sokszor $h(s)$ helyett h_s-t írunk.

Hausdorff-sémával tulajdonképpen találkoztunk már a 6.3 (3) tétel bizonyítása során.

Egy topológikus teret *önmagában sűrű*-nek nevezünk, ha nem tartalmaz izolált pontot (azaz nincs benne 1 elemű nyílt halmaz).

6.27. Tétel. *Ha $X = \langle A, \tau \rangle$ önmagában sűrű Hausdorff-tér, akkor van nyílt Hausdorff-sémája.*

Bizonyítás. Legyen $h_\emptyset = A$ és tegyük fel, hogy h_s-t definiáltuk már valamilyen $s \in {}^{<\omega}2$-ra, úgy, hogy az s-nél rövidebb sorozatokra teljesülnek a Hausdorff-séma definíciójában szereplő kikötések. Ezek szerint h_s nemüres, nyílt halmaz. Mivel X önmagában sűrű, h_s legalább két pontból áll, mondjuk $a \neq b \in h_s$. Feltevéseink szerint X Hausdorff-féle, ezért a és b nyílt halmazokkal szétválasztható, legyenek A és B olyan diszjunkt nyílt halmazok, melyekre $a \in A$ és $b \in B$. Végül legyen $h_{s^\frown 0} = h_s \cap A$ és $h_{s^\frown 1} = h_s \cap B$. Ezzel valóban megadtunk egy X-beli nyílt Hausdorff-sémát. ∎

6.28. Tétel. *Legyen T egy $\aleph_0$-stabil elmélet, legyen $\mathcal{A} \models T$ egy struktúra és legyen $X \subseteq A$ tetszőleges. Ekkor*

(1) $S_1^{\mathcal{A}}(X)$-ben az izolált típusok halmaza sűrű.

(2) Ha $F \subseteq S_1^{\mathcal{A}}(X)$ zárt halmaz, akkor az F-hez tartozó altértopológiában az izolált típusok halmaza F-ben sűrű.

Bizonyítás. Az $F = S_1^{\mathcal{A}}(X)$ választással (1) következik (2)-ből, ezért csak ezt bizonyítjuk.

Legyen $\varphi \in Form(L_X)$ tetszőleges formula, melyre $N_\varphi \cap F$ nem üres. Azt kell igazolni, hogy $N_\varphi \cap F$-ben van (relatíve) izolált típus. Jelöljük Y-al $S_1^{\mathcal{A}}(X)$-nek az $N_\varphi \cap F$ alaphalmazú alterét.

Tegyük fel indirekt módon, hogy Y-ban nincs izolált típus, ekkor Y önmagában sűrű, és ezért a 6.27 tétel miatt Y-ban van egy nyílt h Hausdorff-séma. Mindegyik h_s nyílt és nemüres halmaz, ezért van olyan k elemi nyíltzárt halmazok nyomaiból (azaz Y-al vett metszetéből) álló Hausdorff-séma is Y-ban, hogy minden $s \in {}^{<\omega}2$-ra $k_s \subseteq h_s$. Ezért minden $s \in {}^{<\omega}2$-hoz van olyan $\psi_s \in Form(L_X)$ formula, hogy $\emptyset \neq N_{\psi_s} \cap Y = k_s$. Legyen Z a $\{\psi_s : s \in {}^{<\omega}2\}$ formulahalmazban előforduló összes X-beli konstansok halmaza; $|Z| \leq \aleph_0$, mivel a formulahalmazunk megszámlálható.

Legyen minden $f \in {}^{\omega}2$-ra $p_f = \{\psi_{f|n} : n \in \omega\}$. Ha $r \subseteq p_f$ véges, akkor van egy legnagyobb $n \in \omega$, hogy $\psi_{f|n} \in r$ még teljesül. Mivel k egy Hausdorff-séma, ezért $N_{\psi_{f|n}} \cap Y \subseteq \cap_{\psi \in r} N_\psi \cap Y$ nem üres, tehát $\{N_{\psi_{f|n}} \cap Y : n \in \omega\}$ véges metszet tulajdonságú. Y zárt, tehát kompakt altere $S_1^{\mathcal{A}}(X)$-nek, így minden $f \in {}^{\omega}2$-ra van egy $q_f \in Y \cap \cap_{n\in\omega} N_{\psi_{f|n}}$. Most figyeljük meg, hogy ha $f \neq g \in {}^{\omega}2$, akkor van olyan $n \in \omega$, hogy $f(n) \neq g(n)$, ezért $N_{\psi_{f|(n+1)}} \cap Y$ és $N_{\psi_{g|(n+1)}} \cap Y$ diszjunktak. Emiatt $p_f \neq p_g$, vagyis $\{q_f : f \in {}^{\omega}2\}$ Z feletti típusok egy kontinuum számosságú halmaza. Ugyanakkor, mint láttuk, $|Z| \leq \aleph_0$, ami ellentmond T $\aleph_0$-stabilitásának. ∎

6.29. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy struktúra, és legyen $X \subseteq A$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ atomos X felett, ha minden $n \in \omega$-ra $\mathcal{A}$-ban csak izolált $S_n^{\mathcal{A}}(X)$-beli típusok realizálhatók.*

Ezek szerint $\mathcal{A}$ pontosan akkor atomos X felett, ha $\langle \mathcal{A}, x \rangle_{x \in X}$ atomos struktúra a 4.7 definíció értelmében.

6.30. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy struktúra, és legyen $X \subseteq A$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ konstruálható X felett, ha van olyan α rendszám, hogy $A - X$ elemeit ismétlés nélkül fel lehet sorolni egy $\langle c_i : i < \alpha \rangle$ transzfinit (α hosszú) sorozatban úgy, hogy minden $i < \alpha$-ra $tp^{\mathcal{A}}(c_i / X \cup \{c_j : j < i\})$ izolált típus. A $\langle c_i : i < \alpha \rangle$ sorozatot $\mathcal{A}$ egy X feletti konstrukciójának nevezzük.*

Az előbbi definícióban α megszámlálhatónál nagyobb is lehet, sőt, $\alpha > |A|$ is előfordulhat, hiszen felsorolásunk rendtípusa lehet $|A|$-nál nagyobb.

6.31. Tétel. *Legyen $\mathcal{B}$ olyan L-struktúra, melyre $Th(\mathcal{B})$ $\aleph_0$-stabil, és legyen $X \subseteq B$ tetszőleges. Ekkor van $\mathcal{B}$-nek egy X felett konstruálható elemi része.*

Bizonyítás. Transzfinit rekurzióval megadunk egy X feletti konstrukciót. Tegyük fel, hogy minden $i < \alpha$-ra megadtuk már a páronként különböző $c_i \in B$ elemeket úgy, hogy mindegyik $i < \alpha$-ra $tp^{\mathcal{B}}(c_i / X \cup \{c_j : j < i\})$ izolált. Legyen $Y = X \cup \{c_i : i < \alpha\}$. Ha az Y halmaz $\mathcal{B}$ egy elemi részének alaphalmaza, akkor készen vagyunk. Ha nem ez a helyzet, akkor egyrészt $B - Y$ nemüres, másrészt a Tarski-Vaught teszt (1.13 tétel) miatt van olyan $\varphi \in Form(L)$ és $\bar{c} \in Y$, hogy $\mathcal{B} \models \exists v \varphi(v, \bar{c})$, de az Y által meghatározott struktúrában nincs $\varphi(v, \bar{c})$-t realizáló elem. A 6.28 tétel miatt van izolált $p \in N_{\varphi(v,\bar{c})} \subseteq S_1^{\mathcal{B}}(Y)$ típus. Ezek szerint $\varphi(v, \bar{c}) \in p$. Mivel p izolált, $Th(\mathcal{B})$ minden modelljében, így $\mathcal{B}$-ben is realizálható. Legyen $c_\alpha \in B$ egy p-t realizáló elem. Mivel c_α típusa p, ezért az világos, hogy c_α típusa izolált a korábbi elemek (unió X) felett. Továbbá c_α realizálja $\varphi(v, \bar{c}) \in p$-t, mely Y-ban nem realizálható. Ezért c_α különbözik az összes korábbi c_i-től.

Végül mivel $\mathcal{B}$ elemi része saját magának, a konstrukció legkésőbb akkor befejeződik, ha $B - X$ minden elemét felsoroltuk (de lehet, hogy előbb készen vagyunk). ∎

Feladat. Legyen $\mathcal{B}$ adott struktúra és legyen $X \subseteq B$. Ha $\mathcal{A}_0$ és $\mathcal{A}_1$ két, X felett konstruálható elemi rész $\mathcal{B}$-ben, akkor $\mathcal{A}_0$ és $\mathcal{A}_1$ izomorf (sőt, olyan izomorfizmus is van köztük, mely X-n identikus).

6.32. Tétel. *Ha az $\mathcal{A}$ L-struktúra konstruálható X felett, akkor atomos X felett.*

Bizonyítás. Legyen $\langle c_i : i < \alpha \rangle$ az $\mathcal{A}$ egy X feletti konstrukciója. Transzfinit indukcióval igazoljuk, hogy minden $\beta \leq \alpha$-ra teljesül, hogy ha $\bar{c} \in \{c_i : i < \beta\}$ akkor $tp^{\mathcal{A}}(\bar{c}/X)$ izolált. Tegyük fel, hogy $\beta \leq \alpha$ és ezt igazoltuk már minden $\gamma < \beta$-ra.

Legyen $\bar{c} \in \{c_i : i < \beta\}$ egy véges sorozat.

Ha β limeszrendszám, akkor az állításunk β-ra is igaz marad. Tegyük most fel, hogy $\beta = \gamma + 1$. Ha $c_\gamma \notin \bar{c}$, akkor $\bar{c} \subseteq \{c_i : i < \gamma\}$, ezért az indukciós feltétel miatt szintén igaz marad az állítás. Ezért feltehetjük, hogy $\bar{c} = c_\gamma^\frown \bar{c}'$, ahol $\bar{c}' \subseteq \{c_i : i < \gamma\}$.

Vegyük észre, hogy $tp^{\mathcal{A}}(c_\gamma / X \cup \{c_i : i < \gamma\})$ izolált típus, mondjuk a $\varphi_0(v, \bar{d}) \in Form(L_{X \cup \{c_i : i < \gamma\}})$ formula izolálja. Továbbá, indukciós feltételünk értelmében

$$tp^{\mathcal{A}}(\bar{d}^\frown \bar{c}'/X)$$

izolált, mondjuk $\varphi_1(\bar{w}, \bar{e})$ izolálja. Állítjuk, hogy $p := tp^{\mathcal{A}}(c_\gamma^\frown \bar{d}^\frown \bar{c}'/X)$-t izolálja a $\phi(v, \bar{y}^\frown \bar{z}) = \varphi_0(v, \bar{y}) \wedge \varphi_1(\bar{y}^\frown \bar{z}, \bar{e})$ formula. Ha ez nem így lenne, akkor lenne olyan $\varrho(v, \bar{y}^\frown \bar{z}, \bar{f}) \in Form(L_X)$ formula, melyre $\phi \wedge \varrho$ és $\phi \wedge \neg\varrho$ is realizálható lenne $\mathcal{A}$-ban; realizálják ezeket a formulákat rendre az $a_0^\frown \bar{a}_1^\frown \bar{a}_2$ és a $b_0^\frown \bar{b}_1^\frown \bar{b}_2$ sorozatok. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\exists v(\varphi_0(v, \bar{y}) \wedge \varphi_1(\bar{y}^\frown \bar{z}, \bar{e}) \wedge \varrho(v, \bar{y}^\frown \bar{z}, \bar{f})) \in tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}_1^\frown \bar{a}_2/X) \text{ és}\\
&\exists v(\varphi_0(v, \bar{y}) \wedge \varphi_1(\bar{y}^\frown \bar{z}, \bar{e}) \wedge \neg\varrho(v, \bar{y}^\frown \bar{z}, \bar{f})) \in tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}_1^\frown \bar{b}_2/X),
\end{aligned}$$

tehát $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}_1^\frown \bar{a}_2/X) \neq tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}_1^\frown \bar{b}_2/X)$ következne. Ugyanakkor, a fentiek szerint $\mathcal{A} \models \varphi_1(\bar{a}_1^\frown \bar{a}_2, \bar{e})$ és $\mathcal{A} \models \varphi_1(\bar{b}_1^\frown \bar{b}_2, \bar{e})$, ami φ_1 választása miatt azt jelenti, hogy e két sorozat X feletti típusainak mégis meg kéne egyeznie.

Ezek szerint tehát p izolált típus. Állítjuk, hogy $q = tp^{\mathcal{A}}(c_\gamma^\frown \bar{c}'/X)$-t izolálja a $\exists \bar{z} \phi(v, \bar{y}, \bar{z})$ formula. Ismét indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy van olyan $\varrho(v, \bar{y}, \bar{f}) \in Form(L_X)$, hogy $\exists \bar{z} \phi(v, \bar{y}, \bar{z}) \wedge \varrho(v, \bar{y}, \bar{f})$ és $\exists \bar{z} \phi(v, \bar{y}, \bar{z}) \wedge \neg\varrho(v, \bar{y}, \bar{f})$ is realizálható $\mathcal{A}$-ban; realizálják e formulákat rendre az $a_0^\frown \bar{a}_1$ és a $b_0^\frown \bar{b}_1$ A-beli sorozatok. Ezek szerint vannak olyan $\bar{a}_2, \bar{b}_2 \in A$ sorozatok, melyekre

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} \models \phi(a_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2) \wedge \varrho(a_0, \bar{a}_1, \bar{f}) \text{ és}\\
&\mathcal{A} \models \phi(b_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2) \wedge \neg\varrho(b_0, \bar{b}_1, \bar{f}).
\end{aligned}$$

Speciálisan, $tp^{\mathcal{A}}(a_0^\frown \bar{a}_1/X) \neq tp^{\mathcal{A}}(b_0^\frown \bar{b}_1/X)$, mert ϱ csak az első típusban van benne. Ugyanakkor, mivel ϕ izolálja p-t, $p = tp^{\mathcal{A}}(a_0^\frown \bar{a}_1^\frown \bar{a}_2/X) = tp^{\mathcal{A}}(b_0^\frown \bar{b}_1^\frown \bar{b}_2/X)$ következik, ellentmondva az előző mondatnak. ∎

A következő eredmény egy $\aleph_0$-stabil elméletekre vonatkozó típuselkerülési tétel.

6.33. Tétel. *Legyen T teljes és $\aleph_0$-stabil elmélet a megszámlálható L nyelven, és tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \models T$ egy nem-megszámlálható struktúra. Ekkor $\mathcal{A}$-nak van olyan valódi $\mathcal{B}$ elemi bővítése, melyre teljesül, hogy minden $X \in [A]^{\aleph_0}$-ra és $p \in S_1^{\mathcal{A}}(X)$-re p akkor és csak akkor realizálható $\mathcal{A}$-ban, ha realizálható $\mathcal{B}$-ben.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{B}$ elemi bővítése $\mathcal{A}$-nak, akkor minden $\mathcal{A}$-ban realizálható típust $\mathcal{B}$-ben ugyanaz az A-beli elem realizál. Ezért elég olyan $\mathcal{B}$ elemi bővítést keresni, melyben A egy tetszőleges megszámlálható részhalmaza felett nem realizálható több típus, mint $\mathcal{A}$-ban.

Először megmutatjuk, hogy van olyan $\varphi \in Form(L_A)$ formula, melyre

(i) $||\varphi||^{\mathcal{A}}$ megszámlálhatónál nagyobb halmaz, de
(ii) Minden $\psi \in Form(L_A)$ formulára vagy $||\varphi \wedge \psi||^{\mathcal{A}}$ vagy $||\varphi \wedge \neg\psi||^{\mathcal{A}}$ megszámlálható halmaz.

Tegyük fel, hogy ez nincs így. Meg fogunk adni $\mathcal{A}$-ban egy csupa megszámlálhatónál nagyobb és definiálható halmazból álló h Hausdorff-sémát. Legyen $h_\emptyset = A$ és tegyük fel, hogy $n \in \omega, n > 0$ és minden $s \in {}^{<n}2$-re megadtuk már a h_s definiálható, és megszámlálhatónál nagyobb halmazt. Legyen $s \in {}^{n-1}2$. Feltevéseink szerint a h_s-t definiáló φ formulához is van egy $\psi \in Form(L_A)$, melyre $||\varphi \wedge \psi||^{\mathcal{A}}$ és $||\varphi \wedge \neg\psi||^{\mathcal{A}}$ is megszámlálhatónál nagyobb. Legyen $h_{s^\frown 0} = ||\varphi \wedge \psi||^{\mathcal{A}}$ és legyen $h_{s^\frown 1} = ||\varphi \wedge \neg\psi||^{\mathcal{A}}$. Ezzel a Hausdorff-sémát megadtuk. Legyen minden $s \in {}^{<\omega}2$-re φ_s egy h_s-t definiáló formula, legyen Z a $\{\varphi_s : s \in {}^{<\omega}2\}$ formulahalmazban előforduló összes konstansok megszámlálható halmaza és legyen minden $f \in {}^{\omega}2$-re $p_f = \{\varphi_{f|n} : n \in \omega\}$. Könnyű ellenőrizni, hogy mindegyik p_f végesen realizálható, ezért kiterjeszthető egy q_f Z feletti típussá. Mivel h Hausdorff séma, ezek a típusok páronként különbözni fognak egymástól, ezért $\{q_f : f \in {}^{\omega}2\} \subseteq S_1^{\mathcal{A}}(Z)$ miatt $|S_1^{\mathcal{A}}(Z)| \geq 2^{\aleph_0}$ ellentmondva annak, hogy T $\aleph_0$-stabil.

Rögzítsünk egy φ formulát, melyre (i) és (ii) teljesül és legyen

$$p = \{\psi \in Form(L_A) : \ | \ ||\varphi \wedge \psi||^{\mathcal{A}} \ | \geq \aleph_1\}.$$

Az előbbi (i) és (ii) miatt $p \in S_1^{\mathcal{A}}(A)$ egy típus. Legyen $\mathcal{C}$ egy $|A|^+$-szaturált elemi bővítése $\mathcal{A}$-nak, ebben van egy $c \in C$, mely realizálja p-t. Legyen $\mathcal{B}$ egy olyan elemi rész $\mathcal{C}$-ben, mely konstruálható $A \cup \{c\}$ felett. Ilyen $\mathcal{B}$ van a 6.31 tétel miatt, sőt, a 6.32 tétel maitt $\mathcal{B}$ atomos $A \cup \{c\}$ felett. Állítjuk, hogy ez a keresett struktúra.

Mivel minden $a \in A$-ra $v \neq a \in p$ és c realizálja p-t, ezért $c \notin A$, azaz $\mathcal{B}$ egy valódi elemi bővítése $\mathcal{A}$-nak.

Legyenek $X \in [A]^{\aleph_0}$ és $b \in B$ tetszőlegesek; azt kell megmutatni, hogy a $q = tp^{\mathcal{B}}(b/X)$ típus $\mathcal{A}$-ban is realizálható. A konstrukció miatt q izolált $A \cup \{c\}$ felett, azaz van olyan $\varphi(v, z, \bar{w}) \in Form(L)$ formula és $\bar{d} \in A$, hogy

$$\mathcal{B} \models \exists v \varphi(v, c, \bar{d}) \qquad \text{és} \qquad \langle \mathcal{B}, c, a \rangle_{a \in A} \models \forall v(\varphi(v, c, \bar{d}) \Rightarrow \gamma(v))$$

fennáll minden $\gamma(v) \in q$-ra. A kompaktsági tétel miatt ezért van olyan megszámlálható $\Delta \subseteq Th(\langle \mathcal{B}, c, a \rangle_{a \in A})$, hogy $\exists v \varphi(v, c, \bar{d}) \in \Delta$ és $\Delta \models \forall v(\varphi(v, c, \bar{d}) \Rightarrow \gamma(v))$ teljesül minden $\gamma(v) \in q$-ra. Most figyeljük meg, hogy ha $\delta(c) \in \Delta$, akkor $\delta(v) \in p$ és ezért $\delta(v)$-t megszámlálható kivétellel $||\varphi||^{\mathcal{A}}$-nak minden eleme kielégíti. Mivel $|\Delta| \leq \aleph_0$, ezért van olyan $c_0 \in A$, mely egyszerre kielégít minden olyan $\delta(v) \in$

$Form(L_A)$ formulát, melyre $\delta(c) \in \Delta$. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{A}^+ := \langle \mathcal{A}, c_0, a\rangle_{a\in A}$ egy modellje Δ-nak. Ekkor viszont $\mathcal{A}^+ \models \exists v\varphi(v, c_0, \bar{d})$, van tehát olyan $a \in A$, melyre $\mathcal{A}^+ \models \varphi(a, c_0, \bar{d})$. Továbbá minden $\gamma(v) \in q$-ra $\mathcal{A}^+ \models \forall v(\varphi(v, c_0, \bar{d}) \Rightarrow \gamma(v))$ azaz a realizálja q-t, ahogyan állítottuk. ∎

6.34. Tétel. *(Leszálló Morley-tétel.)*
Legyen L megszámlálható nyelv, T egy teljes és konzisztens elmélet L-ben és legyen $\kappa \geq \aleph_1$. Ha T κ-kategorikus, akkor
(1) T $\aleph_1$-kategorikus is, sőt,
(2) T minden $\aleph_1$ számosságú modellje szaturált.

Bizonyítás. A szaturált modellek 2.44 unicitástétele miatt elég (2)-t igazolni. Legyen tehát $\mathcal{A} \models T$ egy $\aleph_1$ számosságú struktúra. Meg fogunk adni egy $\mathcal{A}$-ból induló $\langle \mathcal{A}_\alpha : \alpha \leq \kappa\rangle$ szigorúan növő elemi láncot úgy, hogy minden $\alpha \leq \kappa$-ra, $X \in [A]^{\aleph_0}$-ra és $p \in S_1^{\mathcal{A}}(X)$-re

(a) p akkor és csak akkor realizálható $\mathcal{A}$-ban, ha realizálható $\mathcal{A}_\alpha$-ban, és
(b) $|A_\alpha| \leq \aleph_1 + |\alpha|$.

Legyen $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$. Tegyük fel, hogy $\alpha \leq \kappa$ és minden $\beta < \alpha$-ra $\mathcal{A}_\beta$-t definiáltuk már. Ha α limeszrendszám, akkor legyen $\mathcal{A}_\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\mathcal{A}_\beta$, erre (a) és (b) nyilván érvényben marad.

Ha $\alpha = \beta + 1$ rákövetkező, akkor a 6.33 tétel szerint van olyan $\mathcal{B}$ valódi elemi bővítése $\mathcal{A}_\beta$-nak, melyben csak azok az A megszámlálható halmazai feletti típusok realizálhatók, melyek $\mathcal{A}_\beta$-ban is realizálhatók. Ez az (a) feltétel β-ra vonatkozó példánya szerint azt jelenti, hogy A megszámlálható részhalmazai felett $\mathcal{B}$-ben csak az $\mathcal{A}$-ban realizálható típusokat lehet realizálni. Tehát $\mathcal{B}$-re az (a) kirovás teljesül, de (b) nem biztos: lehet, hogy $\mathcal{B}$ túl nagy. Ezért legyen $\mathcal{A}_\alpha$ egy olyan $\aleph_1 + |\alpha|$ számosságú elemi rész $\mathcal{B}$-ben, mely tartalmazza $\mathcal{A}_\beta$-t és bővebb nála. Ezzel A megszámlálható részhalmazai felett realizálható típusok számát nem növeltük: $\mathcal{A}_\alpha$-ban is legfeljebb az $\mathcal{A}$-ban realizálható ilyen típusok lesznek realizálhatók. Ugyanakkor $\mathcal{A}$ elemi része $\mathcal{A}_\alpha$-nak, ezért (a) (és persze (b) is) teljesül $\mathcal{A}_\alpha$-ra.

Legyen $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}_\kappa$. A konstrukció (b) pontja miatt $|A^*| = \kappa$ és az 1.18 tétel miatt $\mathcal{A}^* \models T$. Továbbá a 6.21 tétel szerint T-nek van $\aleph_1$-szaturált κ számosságú modellje, és mivel T κ-kategorikus, $\mathcal{A}^*$ is $\aleph_1$-szaturált. Ha tehát $X \in [A]^{\aleph_0}$ és $p \in S_1^{\mathcal{A}}(X)$ tetszőleges, akkor $X \subseteq A^*$ és p realizálható $\mathcal{A}^*$-ban. De ekkor (a) miatt p $\mathcal{A}$-ban is realizálható, vagyis $\mathcal{A}$ valóban szaturált. ∎

6.35. Következmény. *Legyen L megszámlálható nyelv, legyen T egy teljes és konzisztens elmélet. Ekkor a következők ekvivalensek.*

(1) T minden nem-megszámlálható modellje szaturált.
(2) Minden $\kappa > \aleph_0$-ra T κ-kategorikus.
(3) Van olyan $\kappa > \aleph_0$, melyre T κ-kategorikus.
(4) T $\aleph_1$-kategorikus.

Bizonyítás. (1)-ből (2) következik a szaturált modellek 2.44 unicitástétele szerint. (2)-ből (3) nyilvánvalóan következik. A 6.34 (leszálló Morley-tétel) szerint (3)-ból következik (4), a 6.25 (felszálló Morley-tétel) szerint pedig (4)-ből következik (1). ∎

Végig feltettük, hogy modelljeink nyelve megszámlálható. Morley eredeti tételében is így szerepelt az állítás, és sokáig nyitott probléma volt, hogy mi a helyzet megszámlálhatónál nagyobb nyelvek esetén. Végül sok, váratlan technikai nehézséget legyőzve, Shelah igazolta, hogy az előbbi következmény természetes általánosítása igaz marad megszámlálhatónál nagyobb nyelvekre is.

Morley eredeti bizonyítása más volt, mint amit fentebb ismertettünk, és a „Morley-rang” fogalmára épült. Ennek a fogalomnak nagyon sok szép és érdekes alkalmazása van, e jegyzetben később mi is használjuk majd. Ezért a fejezetet azzal zárjuk, hogy definiáljuk a Morley-rangot és megvizsgáljuk néhány alaptulajdonságát.

Emlékeztetünk a topologikus terek pontjainak Cantor-Bendixon-féle osztályozására: legyen $X = \langle A, \tau \rangle$ egy topologikus tér. X izolált pontjainak halmazát jelöljük X^*-al, és transzfinit rekurzióval definiáljuk a $CB_X(\alpha)$ halmazokat a következő módon. Legyen $CB_X(0) = X^*$. Ha α tetszőleges rendszám, és $CB_X(\beta)$-t definiáltuk már minden $\beta < \alpha$-ra, akkor legyen $CB_X(\alpha) = (X - \cup_{\beta<\alpha} CB_X(\beta))^*$; a jobboldalon az $X - \cup_{\beta<\alpha} CB_X(\beta)$ altérben vesszük az izolált pontokat. Egy $x \in X$ pont rangja az a legkisebb α rendszám (ha van ilyen), melyre $x \in CB_X(\alpha)$ teljesül. Az izolált pontok rangja tehát 0, azoknak a pontoknak a rangja lesz 1, melyek izolálttá válnak az izolált pontok eldobása után (azaz, melyekhez csak izolált pontok torlódnak), és így tovább. Azt mondjuk, hogy X diszpergált tér, ha minden pontjának van rangja. Például a racionális számok metrikus tere a szokásos metrikával önmagában sűrű (azaz nem tartalmaz izolált pontot), ezért minden α rendszámra $CB_Q(\alpha) = \emptyset$ és így ez a tér NEM diszpergált. Diszpergált terekre a feladatokban adunk példákat, nekünk a következő tétel miatt fontos a fogalom.

6.36. Tétel. *Legyen T $\aleph_0$-stabil elmélet, legyen $\mathcal{A} \models T$ és $X \subseteq A$ tetszőleges. Ekkor az $S_1^{\mathcal{A}}(X)$ tér diszpergált.*

Bizonyítás. Legyen minden α rendszámra $C_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} CB_{S_1^{\mathcal{A}}(X)}(\beta)$. Transzfinit indukcióval igazoljuk, hogy minden α rendszámra teljesül a következő:

$$(*) \text{ ha } C_\alpha \neq S_1^{\mathcal{A}}(X), \text{ akkor } S_1^{\mathcal{A}}(X) - C_\alpha\text{-ban van izolált pont.}$$

Ez azt jelenti, hogy, amíg a $CB_{S_1^{\mathcal{A}}(X)}(\alpha)$ halmazok be nem fedik $S_1^{\mathcal{A}}(X)$-t (azaz amíg nem fogyott el $S_1^{\mathcal{A}}(X)$ összes eleme), addig a C_α halmazok szigorúan nőnek, azaz minden lépésben kiveszünk legalább 1 pontot, ezért legfeljebb $|S_1^{\mathcal{A}}(X)|^+ = |X|^+$ lépésben minden ponthoz sikerül rangot társítani (az előbbi egyenlőség utolsó lépésében használtuk T $\aleph_0$-stabilitását és a 6.3 tételt is).

Először belátjuk, hogy C_α nyílt halmaz. Legyen ugyanis $p \in C_\alpha$, ekkor van olyan $\beta < \alpha$, hogy $p \in CB_{S_1^{\mathcal{A}}(X)}(\beta)$. Ez azt jelenti, hogy p izolált pont az $S_1^{\mathcal{A}}(X) - C_\beta$ térben. Van tehát egy olyan p-t tartalmazó nyílt G halmaz, melyre teljesül, hogy $G - \{p\} \subseteq \cup_{\gamma<\beta} CB_{S_1^{\mathcal{A}}(X)}(\gamma)$, azaz $G \subseteq C_\alpha$.

Tegyük fel végül, hogy valamely α rendszámra C_α valódi részhalmaza $S_1^{\mathcal{A}}(X)$-nek. Ekkor $S_1^{\mathcal{A}}(X) - C_\alpha$ nemüres zárt halmaz, ezért a 6.28 tétel miatt van benne izolált pont, azaz $(*)$ valóban fennáll. ∎

Feladatok. 1. Bizonyítsuk, hogy minden megszámlálható teljes metrikus tér diszpergált.

2. Bizonyítsuk, hogy minden megszámlálható kompakt Hausdorff-tér diszpergált, sőt az izolált pontok halmaza sűrű.

6.37. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges struktúra. A $p \in S_1^{\mathcal{A}}(X)$ típus $RM(p)$ Morley-rangja a $p \subseteq p'$ pontok Cantor-Bendixson rangjainak szuprémuma $S_1^{\mathcal{A}'}(X')$-ben, ahol $\mathcal{A}'$ tetszőleges elemi bővítése $\mathcal{A}$-nak, $X \subseteq X' \subseteq A'$ és $p \subseteq p' \in S^{\mathcal{A}'}(X')$ szintén tetszőlegesek. Egy topologikus tér egy a pontjának Cantor-Bendixon rangját $CBR(a)$-val jelöljük.*

Meg fogjuk mutatni, hogy $\aleph_0$-stabil elméletek modelljeiben minden típusnak van Morley-rangja. Ennek a megfordítása is igaz: ha egy elmélet minden modelljének minden Stone-tere diszpergált, akkor az elmélet $\aleph_0$-stabil.

Most típusokról formulákra is kiterjesztjük a Morley-rang fogalmát.

6.38. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges struktúra. A $\varphi \in Form(L_A)$ formula $RM(\varphi)$ Morley-rangját így definiáljuk:*

$$RM(\varphi) = sup\{RM(p) : p \in N_\varphi\},$$

ha a jobboldal értelmes (azaz ha $\mathcal{A}$ minden elemi bővítésében, minden halmaz felett, minden φ-t tartalmazó típusnak van Morley-rangja). Ha $X \subseteq A$ és csak az $S_1^{\mathcal{A}}(X)$-beli φ-t tartalmazó formulák rangjait tekintjük, akkor φ X-re vonatkozó lokális Morley-rangját kapjuk: $RM_X(\varphi) = sup\{CBR(p) \in N_\varphi \subseteq S_1^{\mathcal{A}}(X)\}$.

Nyilvánvaló, hogy $RM_X(\varphi) \leq RM(\varphi)$.

A formulák Morley-rangját egy másik módon is definiálhatnánk. Most ezt ismertetjük.

Célunk lesz megmutatni, hogy a 6.38 és a következő 6.39 definíció ekvivalens.

Eleinte azonban még különbséget kell tennünk a két rangfogalom között. Ezért, amíg a definíciók ekvivalenciát nem igazoltuk, φ 6.39 definíció szerinti Morley-rangját ideiglenesen $R(\varphi)$-vel fogjuk jelölni.

6.39. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges struktúra, legyen $\varphi \in Form(L_A)$, és legyen α egy rendszám.*

- $R(\varphi) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \exists v\varphi(v)$;
- $R(\varphi) \geq \alpha \;\Leftrightarrow\;$ *ha α limeszrendszám és minden $\beta < \alpha$-ra $RM(\varphi) \geq \beta$;*
- $R(\varphi) \geq \alpha + 1 \;\Leftrightarrow\;$ *$\mathcal{A}$ valamely $\mathcal{B}$ elemi bővítésében vannak olyan egymást páronként kizáró $\psi_i \in Form(L_B), i \in \omega$ formulák, hogy minden $i \in \omega$-ra teljesül $R(\varphi \wedge \psi_i) \geq \alpha$.*

Ha van olyan α rendszám, melyre $R(\varphi) \geq \alpha$ de $R(\varphi) \not\geq \alpha + 1$, akkor azt mondjuk, hogy $R(\varphi) = \alpha$. Ha ilyen rendszám nincs, akkor $R(\varphi) = \infty$.

Ha $\mathcal{B}$ tetszőleges elemi bővítése $\mathcal{A}$-nak, akkor $R_{\mathcal{B}}(\varphi)$-t az előbbiek mintájára definiáljuk azzal a különbséggel, hogy a 3. pontban szereplő végtelen sok páronként kizáró formulát mindig $Form(L_B)$-ben keressük (azaz soha nem térünk át más elemi bővítésekre).

6.40. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges struktúra, és legyen $\mathcal{B}$ egy $\aleph_0$-szaturált elemi bővítése $\mathcal{A}$-nak.*

(1) Ha $\bar{a}, \bar{b} \in A$, $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/\emptyset) = tp^{\mathcal{A}}(\bar{b}/\emptyset)$ akkor minden φ formulára $R(\varphi(v,\bar{a})) = R(\varphi(v,\bar{b}))$.

(2) Minden $\varphi \in Form(L_B)$-re $R(\varphi) = R_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Bizonyítás. (1) igazolásához Tegyük fel, hogy $R(\varphi(v,\bar{a})) \geq \alpha$, ekkor $\mathcal{A}$-nak van olyan $\mathcal{C}$ elemi bővítése, melyre $R_{\mathcal{C}}(\varphi(v,\bar{a})) \geq \alpha$. Legyen $\mathcal{D}$ egy erősen $\aleph_0$-homogén elemi bővítése $\mathcal{C}$-nek. Ebben van olyan $f : D \to D$ automorfizmus, mely $\bar{a}$-t $\bar{b}$-re képezi, és ezért $R_{\mathcal{D}}(\varphi(v,\bar{b})) \geq \alpha$, amiből $R(\varphi(v,\bar{b})) \geq \alpha$ következik. Ezek szerint $R(\varphi(v,\bar{a})) \geq R(\varphi(v,\bar{b}))$; a két formula szerepét felcserélve adódik az állítás.

(2) bizonyításához α szerinti transzfinit rekurzióval igazoljuk, hogy ha $R(\varphi(v,\bar{a})) \geq \alpha + 1$, akkor $R_{\mathcal{B}}(\varphi(v,\bar{a})) \geq \alpha + 1$. Ebből $R_{\mathcal{B}}(\varphi(v,\bar{a})) \geq R(\varphi(v,\bar{a}))$ következik, a fordított egyenlőtlenség pedig nyilvánvaló.

Tegyük tehát fel, hogy a $\beta < \alpha$ rendszámokra igazoltuk már állításunkat, és hogy $R(\varphi(v,\bar{a})) \geq \alpha + 1$. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{A}$ valamely $\mathcal{C}$ elemi bővítésében vannak olyan páronként kizáró $\{\psi_i(v,\bar{c}_i) \in Form(L_C) : i \in \omega\}$ formulák, hogy minden $i \in \omega$-ra $R(\varphi(v,\bar{a}) \wedge \psi_i) \geq \alpha$. Feltehetjük, hogy $\mathcal{B}$ elemi része $\mathcal{C}$-nek (ehhez elég áttérni $\mathcal{C}$ egy legalább $|B|^+$-univerzális elemi bővítésére).

$\mathcal{B}$ $\aleph_0$-szaturált, ezért minden $i \in \omega$-ra vannak olyan $\bar{b}_i \in B$ sorozatok, hogy $tp^{\mathcal{C}}(\bar{b}_i/\bar{a} \cup \cup_{j<i}\bar{b}_j^\frown\bar{c}_j) = tp^{\mathcal{C}}(\bar{c}_i/\bar{a} \cup \cup_{j<i}\bar{b}_j^\frown\bar{c}_j)$. Ekkor (1) miatt minden $i \in \omega$-ra $R(\varphi(v,\bar{a}) \wedge \psi_i(v,\bar{c}_i)) = R(\varphi(v,\bar{a}) \wedge \psi_i(v,\bar{b}_i))$ ezért az indukciós feltevés szerint $R_{\mathcal{B}}(\varphi(v,\bar{a}) \wedge \psi_i(v,\bar{c}_i)) \geq \alpha$. Végül, a $\bar{b}_i$-k választása miatt a $\{\psi_i(v,\bar{b}_i) : i \in \omega\}$

egymást páronként kizáró formulákból áll, ezért $R(\varphi(v,\bar{a})) \geq \alpha+1$, ahogyan állítottuk. ∎

6.41. Lemma.
(1) Legyen X és Y két kompakt és diszpergált Hausdorff-tér, és legyen $f : X \to Y$ folytonos és szürjektív függvény. Ekkor minden $b \in Y$-ra teljesül, hogy van olyan $a \in X$, melyre $f(a) = b$ és b Y-beli rangja legfeljebb akkora, mint a X-beli rangja.

(2) Legyen $\mathcal{A}$ egy $\aleph_0$-stabil struktúra, $Y \subseteq X \subseteq A$ és $p \in S_1^{\mathcal{A}}(Y)$. Ekkor van olyan $q \in S_1^{\mathcal{A}}(X)$, melyre $p \subseteq q$ és $CBR(p) \leq CBR(q)$.

Bizonyítás. (1) igazolásához transzfinit indukcióval megmutatjuk, hogy ha b rangja legalább α, akkor b f szerinti őséépében szintén van legalább α rangú elem.

Tegyük fel, hogy minden $\beta < \alpha$-ra ezt igazoltuk már. Ha α limeszrendszám, akkor minden $\beta < \alpha$-ra legyen b_β egy legalább β rangú elem $f^{-1}(a)$-ban. Mivel X kompakt, a $\cap_{\beta<\alpha} cl(\{b_\gamma : \beta \leq \gamma < \alpha\})$ halmaznak van egy b eleme, és mivel $f^{-1}(a)$ zárt halmaz, $b \in f^{-1}(a)$. Továbbá minden $\beta < \alpha$-ra b torlódik $\{b_\gamma : \beta \leq \gamma < \alpha\}$-hoz is (miért?), ezért b rangja legalább β minden $\beta < \alpha$-ra, azaz ez a rang legalább α.

Tegyük most fel, hogy $\alpha = \beta+1$ rákövetkező rendszám. A feltevéseink szerint van egy $\mathrm{B} = \{b_i : i \in I\} \subseteq Y$ halmaz, mely egyrészt torlódik b-hez, másrészt, melynek minden eleme legalább β rangú. Indukciós feltevésünk értelmében minden $i \in I$-re van egy legalább β rangú $a_i \in f^{-1}(b_i)$ pont. Állítjuk, hogy az $A := \{a_i : i \in I\}$ halmaznak van egy $a \in f^{-1}(b)$-beli torlódási pontja (ez elég, mert ekkor a rangja legalább α). Ha ez nem így lenne, akkor minden $x \in f^{-1}(b)$-nek lenne olyan nyílt környezete, mely diszjunkt A-tól. Ezen környezetek unióját véve olyan $f^{-1}(b)$-t tartalmazó nyílt G halmazt kapunk, mely diszjunkt A-tól, azaz $A \subseteq X - G$. Mivel X kompakt, és f folytonos, ezért $f[X - G]$ egy kompakt és ezért Y-ban zárt, B-t tartalmazó, de b-t nem tartalmazó halmaz. Ez lehetetlen, mert ekkor B nem tudna b-hez torlódni.

(2) igazolásához tekintsük az $f : S_1^{\mathcal{A}}(X) \to S_1^{\mathcal{A}}(Y)$, $f(r) = \{\varphi(v,\bar{c}) \in r : \bar{c} \in Y\}$ függvényt. Ez az f folytonos és szürjektív, valamint $S_1^{\mathcal{A}}(X)$ és $S_1^{\mathcal{A}}(Y)$ kompakt és diszpergált Hausdorff-terek. Ezért alkalmazhatjuk a már igazolt (1)-et. Ezzel készen vagyunk, mert $f^{-1}(p)$-ben csak p-t tartalmazó típusok vannak. ∎

Most igazoljuk a 6.38 és 6.39 definíciók ekvivalenciáját.

6.42. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges struktúra, $X \subseteq A$, $p \in S_1^{\mathcal{A}}(X)$ és $\varphi \in Form(L_X)$. Ekkor*

(1) $CBR(p) = min\{RM_X(\varphi) : \varphi \in p\}$,

(2) $RM(\varphi) = R(\varphi)$.

Bizonyítás. (1) igazolásával kezdjük. Legyen $CBR(p) = \alpha$, ekkor van olyan $\varphi \in p$ formula, mely izolálja p-t $S_1^{\mathcal{A}}(X) - \cup_{\beta<\alpha} CB_{S_1^{\mathcal{A}}(X)}(\beta)$-ban. Ez azt jelenti, hogy $N_\varphi \subseteq S_1^{\mathcal{A}}(X)$ p kivételével csupa, α-nál kisebb rangú típust tartalmaz, azaz φ p-ben, és p-nél kisebb rangú típusokban van benne (ha csak $S_1^{\mathcal{A}}(X)$-beli típusokat tekintünk; X-nél bővebb halmazok felett lehet, hogy van φ-t tartalmazó, nagyobb rangú típus); más szavakkal $RM_X(\varphi) = \alpha$. Ezért (1) baloldala legalább akkora, mint a jobboldala. Fordítva, ha $\psi \in p$, akkor $RM_X(\psi) \geq CBR(p)$, tehát a jobboldal is legalább akkora, mint a baloldal, ezzel (1)-et beláttuk.

(2)-höz most transzfinit indukcióval igazoljuk, hogy ha $RM(\varphi) \geq \alpha + 1$, akkor $R(\varphi) \geq \alpha + 1$. Tegyük fel, hogy ezt már beláttuk minden $\beta < \alpha$-ra. Ha $RM(\varphi) \geq \alpha + 1$, akkor van olyan X' halmaz $\mathcal{A}$ valamely $\mathcal{A}'$ elemi bővítésében, és van olyan $p \in S_1^{\mathcal{A}'}(X')$, hogy $\varphi \in p$ és $CBR(p) \geq \alpha + 1$. Igazolni fogjuk, hogy minden $\phi \in p$-re $R(\phi) \geq \alpha + 1$. Legyen tehát $\phi \in p$ tetszőleges.

Meg fogjuk adni formulák egy $\langle \psi_i \in Form(L_{X'}), i \in \omega \rangle$ sorozatát úgy, hogy minden $i \in \omega$-ra teljesüljenek az alábbiak:

(a) $\mathcal{A} \models \psi_i \Rightarrow \phi$,
(b) $R(\psi_i \wedge \varphi) \geq \alpha$,
(c) $\psi_i \notin p$,
(d) a $\{\psi_i, i \in \omega\}$ formulák páronként kizáróak.

Tegyük fel, hogy minden $i < n$-re megadtuk már ψ_i-t. Feltevéseink szerint $\wedge_{i<n} \neg \psi_i \in p$ és p nem izolált pontja az $S_1^{\mathcal{A}'}(X') - \cup_{\beta<\alpha} CB_{S_1^{\mathcal{A}'}(X')}(\beta)$ térnek, ezért $N_{\phi \wedge \wedge_{i<n} \neg \psi_i}$-ben van egy legalább α rangú $q \neq p$ típus. Legyen $\psi'_n \in q - p$ tetszőleges és legyen $\psi_n = \psi'_n \wedge \varphi$. Ekkor $RM(\psi_n) \geq RM_{X'}(\psi_n) \geq \alpha$ és ezért az indukciós feltevésünk szerint $R(\psi_n) \geq \alpha$, tehát (b) teljesül ψ_n-re. Továbbá (a) és (c) is nyilvánvalóan teljesül. Ezzel megadtuk a $\langle \psi_i : i \in \omega \rangle$ sorozatot, mely (d)-t is kielégíti. Ez tanúsítja, hogy valóban $R(\phi) \geq \alpha + 1$. Az utolsó két bekezdés szerint tehát minden φ-re $R(\varphi) \geq RM(\varphi)$.

Végül fordítva, tegyük fel, hogy $R(\varphi) \geq \alpha + 1$. Legyen $\mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ egy $\aleph_0$-szaturált elemi bővítése; a 6.40 lemma miatt $R_{\mathcal{B}}(\varphi) \geq \alpha + 1$ is teljesül. Ismét transzfinit indukciót alkalmazva α-ra, megmutatjuk, hogy van olyan $p \in S_1^{\mathcal{B}}(X')$ típus (egy alkalmas X' halmaz felett), melyre egyrészt $RM(p) \geq \alpha + 1$, másrészt $\varphi \in p$. Ez elég, mert ebből következik, hogy $RM(\varphi) \geq \alpha + 1$, vagyis $RM(\varphi) \geq R_{\mathcal{B}}(\varphi) = R(\varphi)$. Tegyük tehát fel, hogy $R_{\mathcal{B}}(\varphi) \geq \alpha + 1$. Ekkor a 6.40 lemma szerint vannak olyan páronként ellentmondó $\{\psi_i \in Form(L_B) : i \in \omega\}$ formulák, hogy minden $i \in \omega$-ra $R_{\mathcal{B}}(\varphi \wedge \psi_i) \geq \alpha$. Indukciós feltevésünk szerint ezért minden $i \in \omega$-ra vannak olyan $p_i \in S_1^{\mathcal{B}}(X_i)$ típusok, melyekre $CBR(p_i) \geq \alpha$ és $\psi_i \wedge \varphi \in p_i$. Ezek páronként különbözők, mert a ψ_i-k páronként ellentmondók. Legyen $X' = \cup_{i\in\omega} X_i$. A 6.41 lemma szerint mindegyik p_i kiterjeszthető egy legalább α-rangú $p'_i \in S_1^{\mathcal{B}}(X')$ típussá. Az $S_1^{\mathcal{B}}(X')$ tér kompakt, ezért a $\{p'_i : i \in \omega\}$ halmaznak van egy p torlódási pontja. $RM(p) \geq CBR(p) \geq \alpha + 1$, mert legalább α-rangú pontok torlódnak hozzá, továbbá $\varphi \in p$, mert ellenkező esetben $\neg\varphi \in p$ és $p \in N_{\neg\varphi}$ következne, ami lehetetlen, hiszen $N_{\neg\varphi}$ diszjunkt $\{p'_i : i \in \omega\}$-tól, viszont ez utóbbi halmaz torlódik p-hez. ∎

6.3. Instabil elméletek

A 6.20 tételben igazoltuk, hogy a nem-megszámlálható számosságokon kategorikus elméletek $\aleph_0$-stabilak. Ebben az alfejezetben azt mutatjuk meg, hogy az instabil elméletek nagyon távol esnek a kategorikusaktól: az ilyen elméleteknek minden végtelen számosságon „sok" modelljük van.

6.43. Tétel. *Legyen T teljes elmélet a megszámlálható L nyelven, melyre $|S_1(T)| > \aleph_0$, és legyen κ végtelen számosság. Ekkor T-nek legalább $2^{\aleph_0}$ páronként nem izomorf κ számosságú modellje van.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ a T egy $\aleph_0$-szaturált modellje. Ekkor T teljessége miatt $S_1(T) = S_1^{\mathcal{A}}(\emptyset)$ és ez utóbbi típushalmaz minden eleme realizálható $\mathcal{A}$-ban, mert $\mathcal{A}$ eléggé szaturált. Ezért $\mathcal{A}$ végtelen. A 6.3 (2) tétel miatt $|S_1^{\mathcal{A}}(\emptyset)| = 2^{\aleph_0}$. legyen c egy L-ben nem szereplő új konstansszimbólum, és minden $p \in S_1^{\mathcal{A}}(\emptyset) = S_1(T)$-re legyen $T_p = T \cup p(c)$. Mindegyik T_p konzisztens elmélet, melynek vannak végtelen modelljei, és nyilvánvaló, hogy $T \subseteq T_p$. Ezért a 4.12 tétel szerint minden $p \in S_1(T)$-re van T_p-nek egy olyan κ számosságú $\mathcal{B}_p$ modellje, melyben az üreshalmaz felett csak megszámlálható sok típus realizálható. Legyen $\mathcal{A}_p = \mathcal{B}_p|_L$. Minden $p \in S_1(T)$-re legyen R_p azoknak az üreshalmaz feletti típusoknak a halmaza, melyek realizálhatók $\mathcal{A}_p$-ben. Egy-egy $\mathcal{A}_p$ csak megszámlálható sok típust realizál $S_1(T)$-ből, ezért $|R_p| \leq \aleph_0$. Viszont $\mathcal{A}_p$-ben p realizálható; emiatt $\cup_{p \in S_1(T)} R_p = S_1(T)$. Tehát

$$2^{\aleph_0} = |S_1(T)| = |\cup_{p \in S_1(T)} R_p| \leq |\{R_p : p \in S_1(T)\}| \cdot \aleph_0$$

azaz az $\{R_p : p \in S_1(T)\}$ halmaz legalább $2^{\aleph_0}$ számosságú. Viszont, ha $R_p \neq R_{p'}$, akkor $\mathcal{A}_p$ és $\mathcal{A}_{p'}$ nem lehetnek izomorfak, hiszen ekkor más üreshalmaz feletti típusokat realizálnak. Ez azt jelenti, hogy az $\{\mathcal{A}_p : p \in S_1(T)\}$ halmazban van $2^{\aleph_0}$ páronként nem izomorf struktúra. ∎

A fenti tételnél jóval több is igaz. Alább bizonyítás nélkül közöljük Shelah két idevágó eredményét. Tervezzük, hogy ezek közül az elsőt e jegyzet egy későbbi változatában be fogjuk bizonyítani.

6.44. Tétel. *Legyen T egy instabil elmélet az L nyelven, és legyen $\kappa > |Form(L)|$ egy reguláris számosság. Ekkor T-nek van 2^κ darab κ számosságú modellje, melyek páronként nem ágyazhatók elemien egymásba.*

6.45. Tétel. *Legyen T nem szuperstabil elmélet az L nyelven és $\kappa > |Form(L)|$ tetszőleges számosság. Ekkor T-nek van 2^κ darab κ számosságú modellje, melyek páronként nem ágyazhatók elemien egymásba.*

6.4. A teljesen kategorikus elméletek nem axiomatizálhatók végesen

Legyen T egy megszámlálható nyelven adott elmélet. Azt mondjuk, hogy T teljesen kategorikus, ha T minden végtelen számosságon kategorikus. Ha T teljesen kategorikus, akkor T (végtelen) modelljeit izomorfizmus erejéig teljes mértékig osztályozhatjuk: elég megadni egy végtelen κ számosságot, ez pontosan kijelöli T-nek azt a modelljét, melynek alaphalmaza éppen ekkora. Ha tehát egy elmélet modelljeit izomorfizmus erejéig szeretnénk teljesen áttekinteni, akkor a legegyszerűbb az az eset, ha T minden végtelen számosságon kategorikus.

Egyszerűek-e a teljesen kategorikus elméletek más szempontból is? Ez a kérdés legalább két módon is átfogalmazható konkrétabb kérdésekké:

(1) vannak-e „struktúratételek" a teljesen kategorikus elméletek modelljei számára, melyek a számosságparaméter megadása után még pontosabban megadják, hogy T modelljei hogyan épülnek fel;

(2) milyen bonyolult T, mint formulahalmaz? Speciálisan, végesen axiomatizálható-e T? (Ez utóbbi kérdésre, mint Vaught problémájára fogunk hivatkozni.)

Mint látni fogjuk, e két kérdés szorosan összefügg egymással. Ha egy T elmélet kategorikus egy nem-megszámlálható számosságon, akkor a 6.20 tétel szerint T $\aleph_0$-stabil is. Ezért minden teljesen kategorikus elmélet $\aleph_0$-kategorikus és $\aleph_0$-stabil (ez fordítva nem igaz). $\aleph_0$-kategorikus és $\aleph_0$-stabil T elméletek modelljeire Zilber, Cherlin, Harrington és Lachlan eredményei szerint erős struktúratételek bizonyíthatók, melyekből következik, hogy T minden következményének van véges modellje, ezért Vaught problémájára a válasz tagadó. E struktúratételek az $\aleph_0$-kategorikus, $\aleph_0$-stabil struktúrák automorfizmuscsoportjainak vizsgálatán alapulnak. Az ilyen automorfizmuscsoportok nemcsak oligomorfak az 5.13 tétel szerint, hanem „simán approximálhatók"; az összes ilyen permutációcsoport leírása ismert. Továbbá az $\aleph_0$-kategorikus, $\aleph_0$-stabil struktúrák szerkezete kapcsolatba hozható bizonyos kombinatorikus geometriákkal, matroidokkal, melyek a „kicsi" Morley-rangú definiálható relációkból származtathatók.

Ebben az alfejezetben Vaught problémáját vizsgáljuk. Célunk kiépíteni az előbb említett fogalmak segítségével a „geometriai" stabilitáselmélet alapjait. Ez tehát stabil elméletek típusainak kombinatorikus, algebrai, sőt geometriai tulajdonságait írja le, melyek segítségével stabil elméletek modelljeinek finomszerkezete vizsgálható. E vizsgálatok következményeként be fogjuk bizonyítani, hogy Vaught problémájának egy speciális esetére a válasz tagadó. Tervezzük, hogy a jegyzet egy későbbi változatában bizonyítással együtt közöljük a Zilber-Cherlin-Harrington-Lachlan tételt, mely szerint egy $\aleph_0$-stabil, $\aleph_0$-kategorikus elmélet nem lehet végesen axiomatizálható. Ebben az általános esetben is fontos szerepet játszik az alábbi fogalom.

Legyen T egy $\aleph_0$-stabil elmélet, ekkor a 6.36 tétel miatt T minden modelljében minen halmaz felett minden típusnak van rangja, és ezért e modellekben minden paraméteres formulának is van rangja; e rang a 6.42 tétel miatt azonos a 6.39 definícióban megadott ranggal. Mivel ekvivalens formulák rangja azonos, a könnyebb olvashatóság kedvéért e formulákat azonosítani fogjuk az általuk definiált relációkkal; így beszélni fogunk majd definiálható halmazok, relációk rangjairól is. Legyen X egy definiálható reláció T egy modelljében, melyre $R(X) = \alpha$. A 6.39 definíció szerint ekkor X csak véges sok, páronként diszjunkt α rangú definiálható relációt tartalmazhat, de egyet – saját magát – mindenképp tartalmaz. X fokán azt a legnagyobb véges $D(X)$ számot értjük, ahány X-el megegyező rangú, páronként diszjunkt definiálható relációt tartalmaz X. Ezt úgy kell érteni, hogy minden említett reláció esetleg paramétereket is tartalmazó formulákkal van definiálva T egy olyan alkalmas modelljében mely elemi bővítése az X definiáló formulájában szereplő paramétereket tartalmazó struktúrának.

6.46. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy struktúra és X egy definiálható reláció $\mathcal{A}$-ban. Azt mondjuk, hogy X minimális, ha $R(X) = 1$ és $D(X) = 1$, azaz, ha X rangja és foka is 1.*

Minden véges halmaznak 0 a Morley-rangja. Egy minimális halmaz tehát végtelen, de nem bontható fel két diszjunkt végtelen definiálható halmazzá (mert 1 a foka). Ezért egy definiálható X halmaz pontosan akkor minimális, ha végtelen, de akármilyen másik definiálható Y-t veszünk is, vagy $X \cap Y$ vagy $X - Y$ véges lesz.

6.47. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egy $\aleph_0$-stabil struktúra, melynek végtelen az alaphalmaza. Ekkor*

(1) Ha X egy $\mathcal{A}$-beli definiálható reláció, melyre $R(X) = \alpha$ és $\beta \leq \alpha$, akkor $\mathcal{A}$ egy alkalmas elemi bővítésében van olyan definiálható Y reláció, melyre $R(Y) = \beta$.

(2) $\mathcal{A}$ egy alkalmas elemi bővítésében van minimális reláció.

Bizonyítás. Kezdjük (1) igazolásával. Az $\alpha = \beta$ esetben X a keresett halmaz, ezért feltehetjük, hogy $\beta < \alpha$, vagyis, hogy $\beta + 1 \leq \alpha$. Ekkor a 6.39 definíció szerint van végtelen sok olyan páronként diszjunkt, $\mathcal{A}$ egy alkalmas elemi bővítésében definiálható $\langle X_i, i \in \omega \rangle$ halmaz, melyek mindegyike része X-nek, és melyek rangja legalább β. Mivel $R(X) = \alpha$, ezért véges sok kivétellel minden $i \in \omega$-ra $R(X_i) < \alpha$, vagyis van olyan (sőt, van végtelen sok olyan) $i_0 \in \omega$ melyre $\beta \leq R(X_{i_0}) < \alpha$.

Tegyük most fel, hogy i_j és X_{i_j} definiálva van már valamilyen $j \in \omega$-ra. Alkalmazzuk az előző bekezdésben leírtakat X_{i_j}-re, és az eredményül előálló index és definiálható halmaz legyen rendre i_{j+1} és $X_{i_{j+1}}$. Ezzel rendszámoknak egy β-nál nem kisebb, de szigorúan csökkenő $\langle R(X_{i_j}), j = 0, 1, ... \rangle$ sorozatát kapjuk. A rendszámok jólrendezettsége miatt ez a sorozat véges, vagyis valamelyik lépésben $R(X_{i_j}) = \beta$ teljesül.

(2)-höz jegyezzük meg, hogy a $\{v = a, a \in A\}$ paraméteres formulahalmaz A végtelensége miatt végtelen, és elemei páronként kizárják egymást. Ezért a $v = v$ formulának (vagyis A-nak, mint definiálható halmaznak) legalább 1 a rangja. Ezért (1) miatt $\mathcal{A}$ egy alkalmas elemi bővítésében van pontosan 1 rangú definiálható reláció is; legyen X egy ilyen reláció. Ekkor X foka véges, mondjuk $D(X) = n$. Bontsuk fel X-t az $X_0, ..., X_{n-1}$ páronként kizáró, 1 rangú definiálható relációkra; ekkor n maximalitása miatt $X_0, ..., X_{n-1}$ mindegyike minimális halmaz. ∎

Most egy másik hasznos fogalommal ismerkedünk meg. Egy legalább elsőfokú polinomnak csak véges sok gyöke van. Ez motiválja a következő definíciót.

6.48. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy L-struktúra és legyen $X \subseteq A$. Azt mondjuk, hogy az $a \in A$ elem algebrai X felett, ha van olyan $\varphi(v) \in Form(L_X)$ melyre egyrészt $\mathcal{A} \models \varphi(a)$ másrészt a φ által definiált $||\varphi||^{\mathcal{A}}$ halmaz véges (azaz csak véges sok φ tulajdonságú elem van A-ban). Az a elem transzcendens, ha nem algebrai. Végül X algebrai lezártja az X felett algebrai elemek összessége:*

$$acl^{\mathcal{A}}(X) = \{a \in A : \ a \text{ algebrai } X \text{ felett } \}.$$

6.49. Definíció. *Legyen A adott halmaz és legyen $c : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$. Azt mondjuk, hogy c lezárási operátor, ha minden $X, Y \subseteq A$-ra teljesül, hogy*

(1) $X \subseteq c(X)$;

(2) $X \subseteq Y \Rightarrow c(X) \subseteq c(Y)$;

(3) $c(c(X)) = c(X)$.

Azt mondjuk, hogy c egy algebrai lezárási operátor, ha (1),(2) és (3) mellett még a következő kikötés is teljesül:

(4) Ha $a \in c(X)$ akkor van olyan véges $X_0 \subseteq X$ melyre $a \in c(X_0)$.

Azt mondjuk, hogy c geometriai lezárási operátor, ha (1)–(4) mellett minden $a, b \in A$-ra és $X \subseteq A$-ra még az isteljesül, hogy

(5) Ha $a \in c(X \cup \{b\}) - c(X)$ akkor $b \in c(X \cup \{a\})$.

6.50. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egy L-struktúra. Ekkor $acl^{\mathcal{A}}$ egy algebrai lezárási operátor.*

Bizonyítás. Az előbbi definícióban szereplő (1)-(4) tulajdonságokat fogjuk sorban ellenőrizni. (1) Legyen $a \in X$, ekkor a $v = a$ egy L_X-formula, melyet egyedül a elégít ki. Ezért a algebrai X felett.

(2) Legyen $a \in acl^{\mathcal{A}}(X)$. Ekkor van olyan $\varphi \in Form(L_X)$, melyet $\mathcal{A}$-ban a és még véges sok (esetleg nulla) további A-beli elem elégít ki. A feltétel miatt $\varphi \in Form(L_Y)$ is teljesül, ezért $a \in acl^{\mathcal{A}}(Y)$.

(3) igazolásához először figyeljük meg, hogy (1) szerint $X \subseteq acl^{\mathcal{A}}(X)$ ezért (2) miatt $acl^{\mathcal{A}}(X) \subseteq acl^{\mathcal{A}}(acl^{\mathcal{A}}(X))$. A fordított irányú tartalmazás ellenőrzéséhez tegyük fel, hogy $a \in acl^{\mathcal{A}}(acl^{\mathcal{A}}(X))$. Ezek szerint van olyan $\varphi(v) \in Form(L_{acl^{\mathcal{A}}(X)})$ melyet csak a, és esetleg véges sok, mondjuk k darab további A-beli elem elégít ki. Legyenek $a_0, ..., a_n$ a φ-ben előforduló $acl^{\mathcal{A}}(X) - X$-beli paraméterek (ezek száma véges, mert φ formula). Legyenek $v_0, ..., v_n$ olyan változók melyek nem fordulnak elő φ-ben. Mindegyik a_i algebrai X felett, ezért vannak olyan $\varphi_i(v_i) \in Form(L_X)$ formulák, melyeket a_i-n kívül csak véges sok A-beli elem elégít ki. Legyen φ' az a formula melyet φ-ből úgy kapunk, hogy a_i-t mindenütt v_i-re cseréljük. Tekintsük végül a

következő $\psi(v)$ formulát:

$$\psi(v) = \exists v_0 ... \exists v_n (\varphi_0(v_0) \wedge ... \wedge \varphi_n(v_n) \wedge \varphi'(v, v_0, ..., v_n) \wedge$$
$$\text{„legfeljebb } k \text{ darab különböző } w\text{-re teljesül } \varphi'(w, v_0, ..., v_n)\text{”}).$$

Világos, hogy $\psi \in Form(L_X)$ és hogy a kielégíti ψ-t. Elég tehát azt megmutatni, hogy ψ-t $\mathcal{A}$-ban csak véges sok elem elégíti ki. Tegyük tehát fel, hogy b kielégíti ψ-t. Ekkor vannak olyan $a'_0, ..., a'_n \in A$ elemek, hogy $\langle b, a_0, ..., a_n \rangle$ kielégíti ψ első kvantorblokk utáni részét. A ψ-ben szereplő utolsó konjunkciós tag miatt az $a'_0, ..., a'_n$ paraméterek mellett legfeljebb k darab (tehát véges sok) további elem realizálhatja ψ első kvantorblokk utáni részét. Továbbá, mivel mindegyik φ_i-nek csak véges sok realizációja van A-ban, ezért a ψ első kvantorblokk utáni részét kielégítő $a'_0, ..., a'_n$ elemeket is csak véges sok módon választhatjuk. Ezek miatt ψ-t valóban csak véges sok elem realizálja $\mathcal{A}$-ban.

(4) Ha $a \in acl^{\mathcal{A}}(X)$, akkor van olyan $\varphi \in Form(L_X)$, melyet $\mathcal{A}$-ban a és még véges sok (esetleg nulla) további A-beli elem elégít ki. Legyen X_0 a φ-ben előforduló X-beli paraméterek halmaza (ez véges, mert φ formula). Világos, hogy $\varphi \in Form(L_{X_0})$, ezért a algebrai X_0 felett is. ∎

6.51. Definíció. *Az $\mathcal{A}$ struktúra minimális, ha a $v = v$ formula egy minimális halmazt definiál $\mathcal{A}$-ban (vagy másképp, $\mathcal{A}$ alaphalmaza, mint definiálható halmaz, minimális).*

Most rátérünk Vaught problémájának vizsgálatára. Mint említettük, Zilber, Cherlin, Harrington és Lachlan megválaszolták e problémát: egy teljesen kategorikus (sőt, egy $\aleph_0$-stabil, $\aleph_0$-kategorikus) struktúra elmélete nem lehet végesen axiomatizálható. Igazolható, hogy minden ilyen struktúra alaphalmazának véges a Morley-rangja. Ezért a legegyszerűbb ilyen struktúrák az $\aleph_0$-kategorikus, minimális struktúrák. Mi itt azt mutatjuk meg, hogy az $\aleph_0$-kategorikus, minimális struktúrák elméletei nem axiomatizálhatók végesen. Az általános esetre a fejezet végén még röviden visszatérünk.

6.52. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy $\aleph_0$-kategorikus struktúra. Ekkor A minden véges részhalmazának véges az algebrai lezártja, sőt, van olyan $s : \omega \to \omega$ függvény, hogy minden $k \in \omega$-ra és $X \in [A]^k$-ra $|acl^{\mathcal{A}}(X)| \leq s(k)$.*

Bizonyítás. Az 5.16 tétel bizonyításához hasonlóan meg fogunk adni egy s függvényt, mely eleget tesz az állításnak. Legyen $k \in \omega$ és legyen $\bar{a} \in {}^kA$. Legyen $\mathcal{A}^+ = \langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$. Figyeljük meg, hogy tetszőleges $n \in \omega$ esetén $\mathcal{A}^+$ automorfizmuscsoportjának legfeljebb annyi pályája van ${}^nA$-n, ahány pályája van $\mathcal{A}$ automorfizmuscsoportjának ${}^{n+k}A$-n. Ez utóbbi mennyiség viszont az 5.13 tétel miatt minden

n-re véges, és ezért $\mathcal{A}^+$ is $\aleph_0$-kategorikus. Ezért az 5.10 tétel miatt $\mathcal{A}^+$-ban az üreshalmaz felett csak véges sok típus van. Továbbá figyeljük meg, hogy ha két A-beli elem $\mathcal{A}$-beli $\bar{a}$ feletti típusa megegyezik, akkor ezek az elemek egyszerre algebraiak vagy transzcendensek $\bar{a}$ felett, és egy elem $\mathcal{A}$-ban pontosan akkor algebrai $\bar{a}$ felett, ha $\mathcal{A}^+$-ban algebrai az üreshalmaz felett. Ez utóbbi elemek számát fogjuk vizsgálni. Nevezzünk egy $\emptyset$ feletti $\mathcal{A}^+$-beli típust algebrainak, ha realizációinak halmazában van $\emptyset$ felett algebrai elem (ekkor persze minden ilyen realizáció algebrai $\emptyset$ felett). $\mathcal{A}^+$ üreshalmaz feletti típusai közül néhány algebrai, néhány nem az. A véges sok algebrai típust egyenként véges sok A-beli elem realizálja, ezért $\mathcal{A}^+$-ban az üreshalmaz felett csak véges sok, mondjuk $s_{\bar{a}}$ darab algebrai elem van. Ezzel beláttuk, hogy $|acl^{\mathcal{A}}(\bar{a})| \leq s_{\bar{a}}$.

Ha $\bar{a}$ és $\bar{b}$ egy pályán vannak, akkor $|acl^{\mathcal{A}}(\bar{a})| = |acl^{\mathcal{A}}(\bar{b})|$, mert ha f egy $\bar{a}$-t $\bar{b}$-re vivő automorfizmus, akkor $f[acl^{\mathcal{A}}(\bar{a})] = acl^{\mathcal{A}}(\bar{b})$. Ezért ekkor $s_{\bar{a}} = s_{\bar{b}}$. Végül, mivel $\mathcal{A}$ $\aleph_0$-kategorikus, az 5.13 tétel szerint $\mathcal{A}$ automorfizmuscsoportjának ${}^kA$-n vett pályáinak van egy véges $\bar{a}_0, ..., \bar{a}_{m-1} \in {}^kA$ reprezentánsrendszere. Ezért az $s(k) = max\{s_{\bar{a}_0}, ..., s_{\bar{a}_{m-1}}\}$ választás megfelel a tétel állításának. ∎

6.53. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ minimális struktúra, $\bar{y} \in A$ véges sorozat és $a, b \in A$. Ha a és b transzcendens elemek $\bar{y}$ felett, akkor $tp^{\mathcal{A}}(a/\bar{y}) = tp^{\mathcal{A}}(b/\bar{y})$.*

Bizonyítás. Ha nem így lenne, akkor lenne olyan $\psi \in Form(L_{\bar{y}})$ mely a-ra teljesülne, de b-re nem. Mivel mindkét elem transzcendens $\bar{y}$ felett, ezért a $||\psi||^{\mathcal{A}}$ és $||\neg\psi||^{\mathcal{A}}$ halmazok végtelen, definiálható, diszjunkt részhalmazai lennének A-nak, ami $\mathcal{A}$ minimalitása miatt lehetetlen. ∎

Emlékeztetünk rá, hogy $Form_n(L)$-el azon L-formulák halmazát jelöltük, melyekben legfeljebb a $v_0, ..., v_{n-1}$ változók szerepelnek. Továbbá $\mathcal{A}$ n-elemi rész $\mathcal{B}$-ben, ha egyrészt részstruktúra benne, másrészt minden $\varphi \in Form_n(L)$-re és minden A feletti k értékelésre $\mathcal{A} \models \varphi[k] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[k]$.

6.54. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy $\aleph_0$-kategorikus, minimális L-struktúra.*

(1) Minden $n \in \omega$-ra és minden véges $X \subseteq A$-ra van $\mathcal{A}$-nak egy X-et tartalmazó véges n-elemi része.

(2) $Th(\mathcal{A})$ nem axiomatizálható végesen.

Bizonyítás. (1) igazolásához tegyük fel, hogy n és X rögzített, és legyen s a 6.52 tételben körülírt függvény. Legyen X' egy X-et tartalmazó, legalább $s(n)+1$ elemű véges részhalmaz A-ban, és legyen $Y = acl^{\mathcal{A}}(X')$. Ekkor Y a 6.52 tétel szerint $\mathcal{A}$ egy véges részhalmaza, mely zárt $\mathcal{A}$ műveleteire is: ha f egy k-változós függvényszimbólum és $\bar{a} \in {}^kY$, akkor $f(\bar{a})$ algebrai Y felett, mert ez az egyetlen elem, mely kielégíti a $v = f(\bar{a})$ formulát. Ezért a 6.50 lemma miatt $f(\bar{a}) \in Y$. Elég tehát megmutatni, hogy Y egy n-elemi rész $\mathcal{A}$-ban.

Legyen $\varphi(v, \bar{w}) \in Form_n(L)$; az 1.13 (1) tétel szerint azt kell igazolni, hogy ha $\bar{y} \in {}^nY$ és $\mathcal{A} \models \exists v\varphi(v, \bar{y})$,akkor van olyan $b \in Y$, melyre $\mathcal{A} \models \varphi(b, \bar{y})$. Tegyük tehát fel, hogy $\mathcal{A} \models \exists v\varphi(v, \bar{y})$, és legyen $a \in A$ olyan elem, melyre $\mathcal{A} \models \varphi(a, \bar{y})$. Ha a algebrai $\bar{y}$ felett, akkor, mivel Y algebrailag zárt, a 6.50 lemma szerint $a \in Y$ és készen vagyunk. Ellenkező esetben a transzcendens $\bar{y}$ felett. A 6.53 lemma miatt ezért minden $\bar{y}$ felett transzcendens b elemre igaz, hogy $tp^{\mathcal{A}}(b/\bar{y}) = tp^{\mathcal{A}}(a/\bar{y})$. Ezért $\varphi(v, \bar{y})$ minden $\bar{y}$ felett transzcendens elemre teljesül. Viszont $|acl^{\mathcal{A}}(\bar{y})| \leq s(n) < |Y|$, tehát Y-ban is van egy $\bar{y}$ felett transzcendens b elem, ez az elem kielégíti $\varphi(v, \bar{y})$-t.

(2)-höz először megjegyezzük, hogy $\mathcal{A}$ minimalitása miatt A Morley-rangja 1, és ezért A végtelen halmaz. Legyen minden $n \in \omega$-ra ϕ_n az a formula, hogy „van legalább n különböző elem”. Mindegyik ϕ_n igaz $\mathcal{A}$-ban. Ha most $Th(\mathcal{A})$ végesen axiomatizálható lenne, akkor e véges sok axióma konjunkcióját véve egyetlen formulát kapnánk, melynek (1) szerint lenne véges modellje is, vagyis e konjunkcióból elég nagy n-re nem következne ϕ_n. Tehát egy ilyen véges konjunkcióból nem következhet minden $\mathcal{A}$-ban igaz formula. ∎

A 6.54 tétel érvényben marad $\aleph_0$-kategorikus, $\aleph_0$-stabil struktúrák esetében is. Ebben az általános esetben is központi szerepet játszanak a minimális halmazok és struktúrák, valamint ezek algebrai, geometriai tulajdonságai, az automorfizmuscsoportjuk szerkezete, stb. E tulajdonságokból mutatunk be alább egy keveset, melyeket később közvetlenül is alkalmazunk majd algebrai problémák vizsgálatára.

6.55. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egy minimális L-struktúra. Ekkor $acl^{\mathcal{A}}$ egy geometriai lezárási operátor.*

Bizonyítás. A 6.50 lemma miatt $acl^{\mathcal{A}}$ algebrai lezárási operátor, ezért elég a 6.49 definícióban szereplő utolsó tulajdonságot ellenőrizni. Indirekt módon tegyük fel, hogy $a \in acl^{\mathcal{A}}(X \cup \{b\}) - acl^{\mathcal{A}}(X)$ de b nem algebrai $X \cup \{a\}$ felett. Mivel a algebrai $X \cup \{b\}$ felett, van olyan $\varphi(v, w) \in Form(L_X)$ formula és $n \in \omega$ szám, hogy

$$(1) \qquad \mathcal{A} \models \varphi(a, b) \text{ és } |\ ||\varphi(v, b)||^{\mathcal{A}}| = n;$$

b-nek ez az (1)-ben szereplő tulajdonsága kifejezhető egy $X \cup \{a\}$-beli elemeket paraméterként tartalmazó elsőrendű formulával. Továbbá indirekt feltevésünk szerint b nem algebrai $X \cup \{a\}$ felett, ezért végtelen sok olyan b' elem van A-ban, melyre (1) teljesül. Az (1)-nek eleget tevő b' elemek halmaza $X \cup \{a\}$ felett definiálható, ezért $\mathcal{A}$ minimalitása miatt (1) véges sok (mondjuk m darab) kivétellel A minden b' elemére teljesül. Ez utóbbi állítás azonban a-nak egy elsőrendű tulajdonsága, melyet így formalizálhatunk:

(2) akárhogyan választunk különböző $b_0, ..., b_m$ elemeket, legalább egyikükre teljesülni fog $\varphi(a, b_i) \wedge |\ ||\varphi(v, b_i)||^{\mathcal{A}}| = n$.

Ez a formula csak X-beli paramétereket tartalmaz. Ugyanakkor a nem algebrai X felett, ezért végtelen sok $a' \in A$ szintén kielégíti (2)-t. Ez, megint $\mathcal{A}$ minimalitása miatt azt jelenti, hogy véges sok, mondjuk k darab kivétellel (2) teljesül minden $a' \in A$-ra.

Ha $a \in A$, akkor legyen $B(a) = \{b \in A : \mathcal{A} \not\models \varphi(a,b) \wedge |\ ||\varphi(v,b)||^{\mathcal{A}}| = n\}$. Ha a-ra (2) teljesül, akkor $|B(a)| \leq m$.

Válasszunk most A-ból $n+1$ darab páronként különböző $a_0, ..., a_n$ elemet, melyekre (2) teljesül. Mivel $B(a_0) \cup ... \cup B(a_n)$ legfeljebb $(n+1)m$ elemű, van egy $b \in A - (B(a_0) \cup ... \cup B(a_n))$ elem. Ekkor minden $i \leq n$-re teljesül, hogy

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_i, b) \wedge |\ ||\varphi(v,b)||^{\mathcal{A}}| = n.$$

Ez azonban lehetetlen, mert $a_0, ..., a_{n+1} \in ||\varphi(v,b)||^{\mathcal{A}}$ egy $n+1$-elemű részhalmaz. ∎

Geometriai lezárási operátorra talán a legalapvetőbb példa a következő. Legyen V egy vektortér (tetszőleges test felett) és minden $X \subseteq V$-re legyen $c(X)$ az X által generált altér. Ekkor, mint ismeretes, vagy akár könnyen ellenőrízhető, c egy geometriai lezárási operátor.

Legyen most c tetszőleges geometriai lezárási operátor valamely V halmazon, és nevezzük $X \subseteq V$-t zártnak, ha $X = c(X)$. Ekkor az összes zárt halmazokból álló $\{c(X) : X \subseteq V\}$ halmazrendszert pregeometriának szokás nevezni. Könnyen átgondolható, hogy egy V halmaz részhalmazainak egy családja mikor azonos egy geometriai lezárási operátor zárt halmazainak rendszerével, így a pregeometriákat tisztán kombinatorikus módon is tudjuk jellemezni. A véges alaphalmazú pregeometriákat matroidoknak is nevezik.

Legyen $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(V)$ egy pregeometria V-n. $\mathcal{G}$-t geometriának nevezzük, ha $\emptyset \in \mathcal{G}$ és minden $a \in V$-re $\{a\} \in \mathcal{G}$, azaz, ha az üreshalmaz és V összes egyelemű részhalmaza (pontja) zárt halmaz. Egyeneseknek nevezhetnénk azokat a zárt halmazokat, melyek kételemű részhalmazok lezártjai; síkoknak nevezhetnénk a háromelemű halmazok lezártjait. Bevezethetnénk a projektív geometriákat: ezek azok a geometriák, melyekben bármely két, közös síkan fekvő egyenesnek van közös pontja. Végül emlékeztetünk rá, hogy a D'esargues tétel szerint, ha két háromszög perspektív egy pontra, akkor egy egyenesre is perspektívek. Ez nem teljesül minden (előbbi értelemben vett) projektív síkra (azaz olyan projektív geometriára, melynek alaphalmaza egy 3 elemű részhalmaz lezártja), viszont mindig teljesül, ha a geometriánk legalább 3 dimenziós (azaz van benne olyan 3 elemű részhalmaz, melynek lezártja nem az egész alaphalmaz). Ha a D'esargues tétel teljesül egy projektív geometriára, akkor az „koordinátázható": az ilyen geometriák (mint halmazrendszerek) testek feletti projektív terekből származtathatók.

Ezzel geometriai természetű struktúrák: pregeometriák, geometriák, projektív geometriák, D'esargues-féle projektív geometriák egy hierarchiáját kapjuk.

E geometriák fontos szerepet játszanak az $\aleph_0$-stabil struktúrák szerkezetének leírásában is, illetve modellelméleti technikák segítettek egyes geometriaosztályok teljes áttekintésében. Ezek a kapcsolatok nagyon messzire vezetnek, mi itt megelégszünk annyi eredmény kiépítésével, amennyi további vizsgálatainkhoz szükséges lesz.

Az előbb idézett, D'esargues-féle geometriákra vonatkozó reprezentációs tétel is kiemeli a vektorterek szerepét. Az alábbi definícók és lemmák mind vektortérbeli konstrukcióink természetes általánosításai.

6.56. Definíció. *Legyen c egy geometriai lezárási operátor a V halmazon. Legyen $X \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy X zárt halmaz, ha $X = c(X)$. Továbbá Y generálja X-t, ha $c(Y) = X$. Az X halmaz független, ha minden $a \in X$-re teljesül, hogy $a \notin c(X - \{a\})$. Az X-t generáló független halmazokat X bázisainak nevezzük.*

6.57. Lemma. *Legyen c egy geometriai lezárási operátor a V halmazon és legyen $X \subseteq V$.*

(1) Ha $Z \subseteq X$ független, akkor Z kiterjeszthető X egy bázisává.

(2) X bázisainak azonos a számossága; e közös számosságot hívjuk X dimenziójának.

Bizonyítás. (1) bizonyításához a Zorn-lemmát fogjuk alkalmazni. Legyen $H = \{Y \subseteq X : Z \subseteq Y$ és Y független $\}$. Ekkor H-t a tartalmazás részbenrendezi. H minden lineárisan rendezett részhalmazának unióját is tartalmazza, mert ha $H_0 \subseteq H$ egy ilyen lineárisan rendezett rész, akkor $Z \subseteq \cup H_0 \subseteq X$. Továbbá, $\cup H_0$ független is: ha $a \in c(\cup H_0 - \{a\})$ teljesülne valemely $a \in \cup H_0$-ra, akkor mivel c algebrai lezárási operátor is, lenne olyan véges $E \subseteq \cup H_0 - \{a\}$, melyre $a \in c(E)$. De H lineárisan rendezett, ezért lenne olyan $G \in H$, melyre $a \in G$, $E \subseteq G$ is fennáll. Ez azonban lehetetlen, mert $G \in H$ miatt G független.

A Zorn-lemma tehát alkalmazható H-ra, legyen $I \in H$ maximális. Ekkor $Y \subseteq I$ és I független. Azt kell igazolni, hogy I generálja X-t. Tegyük fel, hogy ez nincs így. Ez azt jelenti, hogy van egy $a \in X - c(I)$ elem. I maximalitása miatt $I \cup \{a\}$ nem lehet független. Ez csak úgy lehet, hogy van egy $b \in I$ elem, melyre $b \in c((I - \{b\}) \cup \{a\})$. Azonban I független és c geometriai lezárási operátor, ezért ekkor $a \in c(I - \{b\} \cup \{b\}) = c(I)$ következne, ellentmondva a választásának.

(2) igazolásához indirekt módon tegyük fel, hogy Y és Z két bázisa X-nek, és hogy $|Y| < |Z|$. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor $|Z|$ végtelen. Mivel c algebrai lezárási operátor, Y minden y eleme benne van Z egy alkalmas véges Z_y részének generátumában. Ezért $Y \subseteq c(\cup_{y \in Y} Z_y)$ és mivel Y generálja X-t,

$$(*) \qquad X = c(Y) = c(\cup_{y \in Y} Z_y).$$

Továbbá, ha Y véges akkor, $\cup_{y \in Y} Z_y$ is az, illetve, ha Y végtelen, akkor $|Y| = |\cup_{y \in Y} Z_y|$. Mindkét esetben $|\cup_{y \in Y} Z_y| < |Z|$, ezért van egy $z \in Z - \cup_{y \in Y} Z_y$. Ez viszont $(*)$ miatt azt jelenti, hogy Z nem független.

Végül azt az esetet vizsgáljuk, amikor Y és Z is véges. Megmutatjuk, hogy ha Y nem részhalmaza Z-nek, akkor Z átalakítható egy olyan Z' bázissá melyre $|Z| = |Z'|$ és $|Y \cap Z| < |Y \cap Z'|$. Ehhez legyen $y \in Y - Z$ és sorolujk fel Z elemeit úgy, hogy $Z \cap Y$ elemeit tesszük előre: $Z = \{z_0, ..., z_{n-1}\}$. Mivel Z bázis, van egy legkisebb $i < n$ szám, melyre $y \in c(\{z_0, ..., z_i\})$. Továbbá, mivel Y független, $y \notin c(\emptyset)$, ezért $y \in c(\{z_0, ..., z_i\}) - c(\{z_0, ..., z_{i-1}\})$. c egy geometriai lezárási operátor, ezért

$$(**) \qquad z_i \in c(\{z_0, ..., z_{i-1}, y\}).$$

Vegyük még észre, hogy $z_i \notin Y$, mert ellenkező esetben a felsorolás választása miatt $z_0, ..., z_{i-1} \in Y$ következne, ami $(**)$ miatt ellenkmondana annak, hogy Y független. Legyen $Z' = Z - \{z_i\} \cup \{y\}$. Világos, hogy $|Z| = |Z'|$ és hogy $|Z \cap Y| < |Z' \cap Y|$. Ezért azt kell ellenőrizni, hogy Z' egy bázis. Az is nyilvánvaló, hogy $(**)$ miatt $z_i \in c(Z')$ és így persze $Z \subseteq c(Z')$. Ezért $X = c(Z) = c(Z')$ azaz Z' az X egy generátorrendszere. Most megmutatjuk, hogy Z' független is.

Ha $y \in c(Z' - \{y\})$ teljesülne, akkor $(**)$ miatt

$$z_i \in c(\{z_0, ..., z_{i-1}, y\}) \subseteq c(c(Z' - \{y\})) = c(Z' - \{y\})$$

következne, vagyis, mivel $Z' - \{y\} = Z - \{z_i\}$, azt kapnánk, hogy Z nem független.

Legyen most $j \neq i$ és tegyük fel, hogy $z_j \in c(Z' - \{z_j\})$. Mivel Z bázis volt, $z_j \notin c(Z' - \{z_j, y\})$ Emiatt, mivel c geometriai lezárási operátor, $y \in c(Z' - \{y\})$. Ez viszont lehetetlen az előző bekezdés szerint.

Induljunk ki Z-ből, és az előző gondolatmenet alapján térjünk át a Z', Z'',... bázisokra egészen addig, míg Y teljes egészében része nem lesz valamelyik Z^* bázisnak. Mivel $|Z| = |Z^*| > |Y|$, van egy $z \in Z^* - Y$ elem. Ez azonban lehetetlen, mert mivel Y az X egy bázisa, $z \in c(Y)$, ugyanakkor Z^* is bázis, ezért a $Z^* - \{z\} \supseteq Y$ halmaz lezártja nem tartalmazhatná z-t. ∎

6.58. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két L-struktúra és legyen f egy elemi leképezés az $X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$ halmazok között. Ekkor f kiterjeszthető egy $g : acl^{\mathcal{A}}(X) \to acl^{\mathcal{B}}(Y)$ elemi leképezéssé.*

Bizonyítás. Transzfinit rekurzióval konstruáljuk meg g-t. Legyen $acl^{\mathcal{A}}(X) - X = \{a_i : i < \kappa\}$, legyen $f_0 = f$. Legyen $j \leq \kappa$ és tegyük fel, hogy megadtuk már elemi leképezések egy növő $\langle f_i : i < j \rangle$ sorozatát úgy, hogy minden $i < j$-re $a_i \in dom(f_{i+1})$. Ha j limeszrendszám, akkor legyen $f_j = \cup_{i<j} f_i$. Legyen most $j = i + 1$ rákövetkező.

Ekkor a_i algebrai X felett, tehát van olyan $\varphi(v, \bar{x}) \in Form(L_X)$ formula és $n \in \omega$, hogy $\mathcal{A} \models \varphi(a, \bar{x})$ és $| \, ||\varphi(v, \bar{x})||^{\mathcal{A}}| = n$. Válasszuk φ-t úgy, hogy a hozzá tartozó n a lehető legkisebb legyen. Egy ilyen φ formula a $p = tp^{\mathcal{A}}(a_i/X)$ típust izolálja, hiszen ha egy $\psi \in p$ formula nem következne φ-ből, akkor $\varphi \wedge \psi$ egy a_i-t szintén tartalmazó, de n-nél kisebb halmazt definiálna $\mathcal{A}$-ban. Mivel f_i elemi leképezés, a $q = f_i(p)$ szintén izolált típus $\mathcal{B}$-ben, és így realizálható is $\mathcal{B}$-ben; legyen b a q egy realizációja. Végül legyen f_j az a kiterjesztése f_i-nek, mely a_i-t b-re képezi. Világos, hogy így elemi leképezést kaptunk.

Állítjuk, hogy $g = f_\kappa$ a keresett leképezés. Az világos, hogy g egy $acl^{\mathcal{A}}(X)$-n értelmezett elemi leképezés, csak az szorul magyarázatra, hogy g értékkészlete az egész $acl^{\mathcal{B}}(Y)$ halmaz. Ezt így gondolhatjuk át: legyen $b \in acl^{\mathcal{B}}(Y)$. Ekkor van olyan $\varphi(v, \bar{y}) \in Form(L_Y)$ formula és $n \in \omega$ hogy $\mathcal{B} \models \varphi(b, \bar{y})$ és $|\ ||\varphi(v, \bar{y}||^{\mathcal{B}}| = n$. Mivel f elemi leképezés, $|\ ||\varphi(v, f^{-1}(\bar{y})||^{\mathcal{A}}| = n$. Ezért g a $H = ||\varphi(v, f^{-1}(\bar{y}))||^{\mathcal{A}}$ halmazt (mely része $acl^{\mathcal{A}}(f^{-1}(\bar{y}))$-nak) injektív módon képzi $K = ||\varphi(v, \bar{y})||^{\mathcal{B}}$-be. Mivel azonban $|H| = |K| = n$ véges, $g|_H : H \to K$ injektivitásából szürjektivitása is következik. ∎

Most igazolunk egy, a 6.52 tétel megfordításával kapcsolatos eredményt.

6.59. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ minimális L-struktúra.*

(1) Ha van olyan $s : \omega \to \omega$ függvény, hogy minden $X \subseteq [A]^{<\omega}$-ra $|acl^{\mathcal{A}}(X)| \leq s(|X|)$, akkor $\mathcal{A}$ teljesen kategorikus.

(2) Tegyük fel, hogy minden $\mathcal{A}$-val elemien ekvivalens struktúra minimális és κ olyan végtelen számosság, hogy ha $\mathcal{B} \equiv_e \mathcal{A}, |B| = \kappa$ akkor minden $X \in [B]^{<\kappa}$-ra $|acl^{\mathcal{B}}(X)| < \kappa$. Ekkor $Th(\mathcal{A})$ κ-kategorikus.

Bizonyítás. Az (1) állítást vissza fogjuk vezetni (2)-re. Tehát (1) feltételei mellett először azt igazoljuk, hogy minden $\mathcal{A}$-val elemien ekvivalens struktúra minimális. Legyen ugyanis $\varphi(v, \bar{w}) \in Form(L)$ tetszőleges, ahol $\bar{w}$ mondjuk n változóból áll. Ekkor $\mathcal{A}$-ban, és így minden vele elemien ekvivalens struktúrában igaz lesz, hogy

„$\forall \bar{w}$ (ha van legalább $s(n) + 1$ különböző $v_0, ..., v_{s(n)}$ elem, melyekre $\varphi(v_0, \bar{w}) \wedge ... \wedge \varphi(v_{s(n)}, \bar{w})$, akkor legfeljebb $s(n)$ kivétellel minden v-re teljesül $\varphi(v, \bar{w})$)".

Emiatt minden, $\mathcal{A}$-val elemien ekvivalens struktúrában csak véges vagy kovéges halmazok definiálhatók. Sőt, ez a gondolat azt is mutatja, hogy ha $\mathcal{B}$ elemien ekvivalens $\mathcal{A}$-val, akkor B egy n elemű részhalmazának algebrai lezártja legfeljebb $s(n)$ elemű. Legyen most $\kappa \geq \aleph_0$ tetszőleges végtelen számosság és legyen $\mathcal{B} \equiv_e \mathcal{A}$ egy κ számosságú modell. Ha $X \in [B]^{<\kappa}$ akkor $acl^{\mathcal{B}}(X) = \cup_{Y \in [X]^{<\omega}} acl^{\mathcal{B}}(Y)$. Ha X véges, akkor ez utóbbi halmaz legfeljebb $s(|X|)$ elemű, ha X végtelen, akkor pedig $|X|$ elemű. Ezért ha (1) feltevései teljesülnek $\mathcal{A}$-ra, akkor minden végtelen κ-ra (2) feltételei is teljesülnek rá.

Ezért elég (2)-t megmutatni. Legyen most κ tetszőleges végtelen számosság, mely eleget tesz (2) feltételeinek és legyenek $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ κ számosságú, $\mathcal{A}$-val elemien ekvivalens struktúrák. A feltevéseink szerint $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ szintén minimális. Ezért a 6.55

lemma miatt $acl^{\mathcal{B}}$ és $acl^{\mathcal{C}}$ egyaránt geometriai lezárási operátorok. Tehát a 6.57 (2) lemma miatt beszélhetünk B és C (részhalmazainak) dimenzióiról. $\mathcal{B}$-nek (és hasonlóan $\mathcal{C}$-nek is) κ a dimenziója, mert ha $X \subseteq B$ egy független halmaz, és $|X| < \kappa$ akkor $|acl^{\mathcal{B}}(X)| < \kappa$, szintén (2) feltevései szerint. Ezért $\mathcal{B}$-ben (és hasonlóan $\mathcal{C}$-ben) minden bázis κ számosságú.

A 6.57 lemma miatt léteznek $X \subseteq B$ és $Y \subseteq C$ bázisok, és az előző bekezdés szerint létezik köztük egy f bijekció.

Állítjuk, hogy f elemi leképezés. Legyen ugyanis $\varphi(v_0, ..., v_{n-1}) \in Form(L)$ tetszőleges formula. A szabad változók n száma szerinti indukcióval belátjuk, hogy minden $x_0, ..., x_{n-1} \in X$-re $\mathcal{B} \models \varphi(x_0, ..., x_{n-1}) \Leftrightarrow \mathcal{C} \models \varphi(f(x_0), ..., f(x_{n-1}))$. Ha $n = 0$, vagyis φ-ben nincs szabad változó, akkor állításunk igaz, mert $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ elemien ekvivalensek. Tegyük most fel, hogy minden, n-nél kevesebb szabad változót tartalmazó formulára igazoltuk már az állítást és legyenek $x_0, ..., x_{n-1} \in X$ tetszőleges, páronként különböző elemek. Tegyük fel, hogy $\mathcal{B} \models \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$. Mivel X bázis, x_0 transzcendens $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ felett, ezért $\mathcal{B}$ minimalitása miatt $\varphi(v, x_1, ..., x_{n-1})$ legfeljebb véges sok, mondjuk m kivétellel minden B-beli elemre teljesül. Ez elsőrendű formulával leírható, ezért indukciós feltevésünk értelmében $\mathcal{C}$-ben is $\varphi(v, f(x_1), ..., f(x_{n-1}))$ legfeljebb m kivétellel fennáll. Ezért e kivételek mind algebraiak $Y_0 = \{f(x_1), ..., f(x_{n-1})\}$ felett, vagyis, minden Y_0 felett transzcendens elem kielégíti $\varphi(v, f(x_1), ..., f(x_{n-1}))$-t. Mivel Y is bázis, $f(x_0)$ transzcendens Y_0 felett, és ezért $\mathcal{C} \models \varphi(f(x_0), ..., f(x_{n-1}))$, ahogyan állítottuk.

Végül a 6.58 lemma segítségével f-et kiterjeszthetjük egy B és C közti elemi leképezéssé. Ez a leképezés természetesen az atomi formulákat is megőrzi, ezért ez a keresett izomorfizmus. ∎

Feladatok. 1. Legyen $\mathcal{A}$ $\aleph_0$-kategorikus, minimális struktúra. Igazoljuk, hogy ha $X \subseteq A$ egy bázis A-ban, akkor X elemei minden rendezés szerint megkülönböztethetetlenek.

2. Legyen V vektortér egy tetszőleges test felett, és legyen $X \subseteq V$ egy bázis. Igazoljuk, hogy X elemei minden rendezés szerint megkülönböztethetetlenek.

Az előbbi bizonyítás szerint az olyan minimális struktúrákban, melyekben véges halmazok algebrai lezártjainak mérete véges marad és csak az eredeti halmaz méretétől függ, tetszőleges bázisok közti leképezés kiterjeszthető egy izomorfizmussá. Ez egyrészt erősen emlékeztet (véges testek feletti) vektorterekkel kapcsolatos klasszikus tételekre, másrészt azt sugallja, hogy a minimális struktúrák automorfizmuscsoportjai nagyon nagyok.

A minimális struktúrák automorfizmuscsoportjainak további vizsgálatával folytatjuk a fejezetet. Legyen G egy permutációcsoport az A halmazon. Ha $X \subseteq A$, akkor G_X-el jelöljük G-nek azokat az elemeit, melyek A-t, mint halmazt, önmagára képezik. (Itt nem arról van szó, hogy G_X elemei identikusan hatnának X-n, hanem csak arról, hogy G_X elemei X elemeit X-be viszik.) Világos, hogy G_X részcsoportja

G-nek.

6.60. Definíció. *Legyen G egy permutációcsoport az A halmazon. Azt mondjuk, hogy G simán approximálható, ha egyrészt oligomorf, másrészt teljesül a következő: minden $n \in \omega$-ra és minden véges $X \subseteq A$-ra van olyan véges $X \subseteq Y \subseteq A$, hogy G_Y-nak ugyanazok a pályái ${}^nY$-n, mint az egész G-nek.*

Ez a fogalom akkor érdekes, ha X végtelen. Egy (végtelen alaphalmazú) simán approximálható permutációcsoport nagyon gazdag: azt hogy két véges sorozat azonos pályán van, olyan permutációk is tanúsítják, melyek hatásai egy tetszőleges módon előre adott véges halmazon végesek maradnak.

Feladatok. 1. Igazoljuk, hogy ω-n a szimmetrikus csoport, mint permutációcsoport simán approximálható.

2. Legyen V végtelen dimenziós vektortér egy véges test felett és legyen G a V invertálható lineáris leképezéseinek csoportja (a kompozícióval, mint művelettel). Igazoljuk, hogy G simán approximálható permutációcsoport.

6.61. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy $\aleph_0$-kategorikus, minimális struktúra. Ekkor $\mathcal{A}$ automorfizmuscsoportja simán approximálható.*

Bizonyítás. Az 5.13 tétel szerint $Aut(\mathcal{A})$ oligomorf. Legyen most $n \in \omega$ rögzített és legyen $X \subseteq A$ adott véges halmaz. Legyen $Y = acl^{\mathcal{A}}(X)$, ez a 6.52 tétel miatt véges. Azt fogjuk belátni, hogy ha $\bar{a}, \bar{b} \in {}^nY$ olyan sorozatok, melyek $aut(\mathcal{A})$ szerint azonos pályán vannak, akkor van $\mathcal{A}$-nak Y-t önmagára, és $\bar{a}$-t $\bar{b}$-re képező automorfizmusa.

Legyen $\bar{a}$ és $\bar{b}$ két ilyen sorozat, és tegyük fel, hogy az $f \in Aut(\mathcal{A})$ automorfizmusra $f(\bar{a}) = \bar{b}$. Legyen $f_0 = f|_{acl^{\mathcal{A}}(\bar{a})}$, ez nyilván egy elemi leképezés $\mathcal{A}$-ban, melyre $dom(f_0) \subseteq Y$. Meg fogjuk adni ilyen elemi leképezések egy szigorúan növő sorozatát.

Tegyük fel, hogy f_i egy már adott elemi leképezés, melyre $dom(f_i) \subseteq Y$ egy algebrailag zárt halmaz. Ha ez még nem az egész Y, akkor van egy $a \in Y - dom(f_i)$ elem, mely $dom(f_i)$ felett transzcendens. Mivel f_i elemi leképezés, értelmezési tartománya és értékkészlete azonos típusú. Ezért az 5.13 tétel szerint f_i kiterjeszthető egy g automorfizmussá. Világos, hogy a $g(a)$ elem $range(f_i)$ felett transzcendens, és hogy $Y - range(f_i)$-ben is van egy $range(f_i)$ felett transzcendens b elem. A 6.53 lemma miatt $tp^{\mathcal{A}}(g(a)/range(f_i)) = tp^{\mathcal{A}}(b/range(f_i))$ ezért elemi leképezést kapunk, ha f_i-t úgy terjesztjük ki, hogy a-t a kiterjesztés b-be vigye. E kiterjesztés a 6.58 lemma miatt kiterjeszthető egy $acl^{\mathcal{A}}(dom(f_i) \cup \{a\})$-n értelmezett elemi leképezéssé; ez legyen f_{i+1}.

Mivel Y véges, az előző bekezdésben megadott leképezés-sorozat valamelyik f_i eleme az egész Y-n értelmezve lesz. Megint, mivel f_i elemi leképezés, $dom(f_i)$ és $range(f_i)$ típusa azonos, ezért az 5.13 tétel miatt f_i kiterjeszthető $\mathcal{A}$ egy h automorfizmusává. Ez a h automorfizmus Y-n úgy hat, mint f_i, azaz Y-t sajátmagára képezi. Végül, mivel $f_0 \subseteq f_i \subseteq h$, azt kapjuk, hogy $h(\bar{a}) = h(\bar{b})$. ∎

A 6.61 tétel szintén érvényben marad $\aleph_0$-stabil, $\aleph_0$-kategorikus struktúrákra is: minden ilyen struktúrának simán approximálható az automorfizmuscsoportja. Ennek a megfordítása nem igaz: vannak olyan nem $\aleph_0$-stabil struktúrák, melyeknek szintén simán approximálható az automorfizmuscsoportja.

Az ω-n megadható simán approximálható permutációcsoportok teljesen le vannak írva: van 7 darab (egyenként végtelen sok ilyen csoportot adó) konstrukciós mód, melyek ω összes simán approximálható permutációcsoportját megadják. Ezek között vannak nagyon érdekes, furcsa csoportok is.

Mint már említettük, a Zilber, Cherlin, Harrington, Lachlan tétel szerint az $\aleph_0$-kategorikus, $\aleph_0$-stabil struktúrák elméletei nem axiomatizálhatók végesen. Ennek igazolása a következőképp történik. Meg lehet mutatni, hogy minden ilyen struktúra alaphalmazának (mint definiálható halmaznak) véges a Morley-rangja, és a Morley-rang szerinti indukciót alkalmazhatunk. Az első nemtriviális lépés a 6.54 tétel igazolása. A 6.47 lemmát segítségül hívva, minden $\aleph_0$-stabil struktúrában találunk egy minimális halmazt. E halmazhoz tartozó pregeometriákat osztályozva áttekinthetők az 1-el nagyobb Morley-rangú halmazok szerkezete, aztán a 2-vel nagyobbaké, és így tovább. Az áttekintés során erősen használjuk a minimális struktúrák automorfizmuscsoportjainak szerkezetét; ezek segítségével, szinte melléktermékként olyan struktúratételeket is nyerünk, mely az $\aleph_0$-kategorikus, $\aleph_0$-stabil modellek finomszerkezetét is leírják. Az indukciós lépésben az „algebrai függés” fogalmának általánosítása központi jelentőségű, mely egyben sok további vizsgálati irány kiindulópontja is. Ezért, habár ebben a jegyzetben nem fogjuk használni (csak későbbi változataiban), ezt a definíciót idézzük az alábbiakban.

Legyen $\mathcal{A}$ egy $\aleph_0$-stabil L-struktúra és legyen $X \subseteq Y \subseteq A$. Legyen $p \in S^{\mathcal{A}}(Y)$. A $p|_X \in S^{\mathcal{A}}(X)$ típust így definiáljuk: $p|_X = \{\varphi \in Form(L_X) : \varphi \in p\}$. Azt mondjuk, hogy p *elágazik* (angolul „forks”) X felett, ha p Morley-rangja szigorúan kisebb, mint $p|_X$ Morley-rangja. Végül az $a \in A$ elem *független* X felett Y-tól, ha $tp^{\mathcal{A}}(a/Y)$ nem ágazik el X felett.

E függetlenségfogalom $\aleph_0$-stabil struktúrákban különösen szépen viselkedik és tovább általánosítható gyengébb stabilitás-feltételeknek eleget tevő esetekre is; ezek az általánosítások szintén központi szerepet játszanak további modellelméleti vizsgálatokban.

Végül megjegyezzük, hogy nem $\aleph_0$-kategorikus de $\aleph_1$-kategorikus, végesen axiomatizálható elméletre Paljutyin adott példát.

6.5. Algebrai Alkalmazások

A korábbi fejezetekben többször utaltunk rá, hogy néhány modellelméleti fogalom definícióját klasszikus algebrai fogalmak motiválják, illetve modellelméleti eredményeink némelyike az algebraiak általánosításainak tekinthetők. Ebben a fejezetben a fordított kapcsolatot vizsgáljuk: példákat adunk arra, hogy a jegyzetben kiépített technikák segítségével hogyan vizsgálhatók algebrai (elsősorban testekkel kapcsolatos) kérdések. Itt csak néhány érdekes további kapcsolatra szeretnénk felhívni a figyelmet, nem célunk a terület szisztematikus bemutatása.

A technikai előkészítések után először Steinitz klasszikus tételét igazoljuk majd: adott karakterisztikájú, megszámlálhatónál nagyobb számosságú algebrailag zárt testek izomorfizmus erejéig egyértelműek (modellelméleti terminológiával: az ilyen testek elmélete minden $\kappa > \aleph_0$ számosságon kategorikusak). Ezután igazoljuk majd a Lefschetz-elvet, mely durván szólva azt mondja ki, hogy egy elsőrendű formula akkor és csak akkor igaz a komplex számok testében, ha végtelen sok különböző p prímszámra igaz algebrailag zárt p karakterisztikájú testekben. A Lefschetz-elv alkalmazásaképpen egy komplex algebrai sokaságokra vonatkozó, algebrai geometriai lemmát igazolunk. Végül, érdekességképpen vázoljuk Hilbert Nullhelytételének egy egyszerű modellelméleti bizonyítását.

Kezdjük a technikai előkészületekkel. Emlékeztetünk rá, hogy egy $\mathcal{F}$ test akkor és csak akkor algebrailag zárt, ha minden $\mathcal{F}$ feletti legalább elsőfokú polinomnak van gyöke $\mathcal{F}$-ben. Ez a gyűrűk nyelvén végtelen sok formulával leírható (minden $n \in \omega$-ra 1-1 formulával kifejezhetjük, hogy a legalább elsőfokú és legfeljebb n-edfokú polinomoknak van gyöke).

6.62. Lemma. *Jelöljük L-el a testek nyelvét és legyen $\mathcal{F}$ egy algebrailag zárt test. Legyen $A \subseteq F$ és legyen $\bar{a}, \bar{b} \in F$ két azonos hosszúságú véges sorozat. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

(1) *$\mathcal{F}$-ben $\bar{a}$-ra és $\bar{b}$-re ugyanazok a kvantormentes $Form(L_A)$-beli formulák igazak.*

(2) *$\mathcal{F}$-nek van olyan A feletti (azaz A-t elemenként fixen hagyó) automorfizmusa, mely $\bar{a}$-t $\bar{b}$-re képezi.*

(3) $tp^{\mathcal{F}}(\bar{a}/A) = tp^{\mathcal{F}}(\bar{b}/A)$.

Bizonyítás. Először is, legyen A' az A által generált résztest. Ekkor A' minden eleme az L nyelv egy termjének értéke valamilyen A-beli sorozaton, ezért minden $Form(L_{A'})$-beli formulában az $A' - A$-beli paramétereket az előbbi termekre cserélve az eredetivel $\mathcal{F}$-ben ekvivalens, $Form(L_A)$-beli formulát kapunk. Ezért A-t esetleg A'-re cserélve feltehetjük, hogy A részteste $\mathcal{F}$-nek.

(1) $\Rightarrow$ (2) igazolásához tegyük fel, hogy (1) igaz. A sorozatok hossza szerinti indukcót alkalmazunk; először tegyük fel, hogy $a = \bar{a}$ és $b = \bar{b}$ egy-egy eleme F-nek. Ha a transzcendens A felett, akkor egyetlen $A[x]$-beli polinomnak sem gyöke, és ez kifejezhető (végtelen sok) $Form(L_A)$-beli kvantormentes formulával. Ezért ekkor b is transzcendens A felett. A transzcendens testbővítések unicitási tétele miatt van egy A feletti a-t b-re képező izomorfizmus $A(a)$ és $B(a)$ között. Mivel $\mathcal{F}$ algebrailag

zárt, ez az izomorfizmus kiterjeszthető $\mathcal{F}$ egy automorfizmusává. Ha a algebrai A felett, akkor legyen A feletti minimálpolinomja p. Mivel b azonos A feletti kvnatormentes formulákat elégít ki, b is gyöke p-nek. Ezért b is algebrai A felett, legyen q a minimálpolinomja. Hasonlóan, a gyöke q-nak, ezért p és q A feletti irreducibilitása és 1-re normált főeggyüthatóik miatt $p = q$. Ezért most az algebrai testbővítések unicitástétele miatt van egy A feletti, a-t b-re képező izomorfizmus $A(a)$ és $A(b)$ között, mely $\mathcal{F}$ algebrai zártsága miatt kiterjeszthető $\mathcal{F}$ egy automorfizmusává.

Tegyük most fel, hogy állításunk n hosszú sorozatokra igaz és $\bar{a} = a^\frown\bar{a}', \bar{b} = b^\frown\bar{b}'$ ahol $\bar{a}'$ és $\bar{b}'$ hossza n. Ekkor $\mathcal{F}$-nek van egy A feletti, $\bar{a}'$-t $\bar{b}'$-re képező f automorfizmusa. Ezért $a^\frown\bar{a}'$ és $f(a)^\frown\bar{b}'$ ugyanazokat a kvantormentes formulákat elégítik ki A felett. De ekkor $f(a)$ és b szintén ugyanazokat a kvantormentes formulákat elégíti ki $A(\bar{b}')$ felett és így az előző bekezdés szerint van egy $A(\bar{b}')$ feletti $g' : A(\bar{b}')(f(a)) \to A(\bar{b}')(b)$ izomorfizmus, mely $f(a)$-t b-re képezi. Mivel $\mathcal{F}$ algebrailag zárt, g' kiterjeszthető $\mathcal{F}$ egy g automorfizmusává. Végül a $g \circ f$ automorfizmus A-t elemenként fixen hagyja és $\bar{a}$-t $\bar{b}$-re képezi.

(2) $\Rightarrow$ (3) a 6.4 lemma miatt igaz (mely egyébként az 1.9 tétel átfogalmazása) és (3) $\Rightarrow$ (1) nyilvánvaló. ∎

Testek esetében az algebrai lezártat kétféleképp is érthetjük: egyszrészt klasszikus értelemben, másrészt pedig a 6.48 definíció szerint, modellelméleti értelemben. Ezért egy F test X részhalmaza felett (algebrai értelemben vett) algebrai elemeinek összességét $ACL^{\mathcal{F}}(X)$-el, modellelméleti értelemben vett algebrai lezártját, mint eddig is, $acl^{\mathcal{F}}(X)$-el fogjuk jelölni.

6.63. Tétel. *Legyen $\mathcal{F}$ algebrailag zárt test, jelöljük L-el e test nyelvét.*

(1) Minden $Form(L_F)$-beli formula $\mathcal{F}$-ben ekvivalens egy kvantormentes $Form(L_F)$-beli formulával.

(2) $\mathcal{F}$ minimális struktúra.

(3) $acl^{\mathcal{F}} = ACL^{\mathcal{F}}$.

Bizonyítás. (1) igazolásához tegyük fel, hogy $\varphi(\bar{v}, \bar{c}) \in Form(L_F)$ és legyen $\mathcal{G}$ az $\mathcal{F}$ egy $\aleph_0$-szaturált elemi bővítése. Legyen $\Phi = \{\psi(\bar{v}) \in Form(L_{\bar{c}}) :\ \psi$ kvantormentes és $\mathcal{F} \models \varphi(\bar{v}, \bar{c}) \to \psi(\bar{v})\}$. Állítjuk, hogy $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos. Ellenkező esetben ugyanis lenne egy $\bar{b} \in G$, mely realizálná ezt a formulahalmazt. Legyen ϱ a $\mathcal{G}$-ben $\bar{b}$-re teljesülő összes kvantormentes $Form(L_{\bar{c}})$-beli formulák halmaza. Ekkor $\varrho \cup \{\varphi\}$ végesen realizálható $\mathcal{G}$-ben, mert különben $\bar{b}$ olyan kvantormentes formulákat is kielégítene, melyek negáltjai következnének φ-ből, tehát a negáltak lennének Φ-ben, ami $\bar{b}$ választása miatt lehetetlen. Ezért van olyan $\bar{c} \in G$, ami $\varrho \cup \{\varphi\}$-t realizálja. De ekkor $\mathcal{G}$-nek a 6.62 lemma miatt van $\bar{c}$-t $\bar{b}$-re képező automorfizmusa és ezért az 1.9 tétel miatt $\mathcal{G} \models \varphi(\bar{b})$ következne ellentmondva $\bar{b}$ választásának.

Végül azt figyeljük meg, hogy Φ egy véges részéből következnie kell φ-nek, ellenkező esetben $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ minden véges része (és így ez az egész halmaz) realizálható lenne $\mathcal{G}$-ben, ellentmondva az előző bekezdésnek. E véges részhalmazban szereplő formulák konjunkcióját véve kapjuk a $\varphi(\bar{v}, \bar{c})$-vel $\mathcal{F}$-ben ekvivalens kvantormentes formulát.

(2) igazolásához legyen $\mathcal{F}'$ az $\mathcal{F}$ tetszőleges elemi bővítése. Először figyeljük meg, hogy ha egy halmaz a testek nyelvén definiálható $\mathcal{F}'$-ben, akkor a gyűrűk nyelvén is az. A gyűrűk nyelvén az 1 szabad változót és esetleg F'-beli paramétereket tartalmazó atomi formulák mind ekvivalensek egy $p(v) = 0$ alakú formulával, melyben $p \in \mathcal{F}'[x]$ egyváltozós polinom. Ennek az algebra alaptétele szerint véges sok gyöke van (vagy F' minden eleme gyöke neki). Ezért az ilyen formulák által definiált halmazok végesek (vagy az egész F'). Most vegyük észre, hogy F' véges vagy kovéges részhalmazainak metszete, uniója és komplementuma is véges vagy kovéges. Ezért $\mathcal{F}'$-ben egyváltozós kvantormentes formulával csak véges vagy kovéges halmazok definiálhatók. Végül legyen $\varphi \in Form(L_{F'})$ tetszőleges 1 szabad változót tartalmazó formula. (1) miatt ez $\mathcal{F}'$-ben ekvivalens egy kvantormentes formulával, melyről láttuk már, hogy véges vagy kovéges halmazt definiál. Ezért $\mathcal{F}$ minimális struktúra.

(3)-hoz tegyük fel, hogy $X \subseteq F$ és $a \in ACL^{\mathcal{F}}(X)$. Ekkor van (az X által generált test felett) egy p nem azonosan nulla polinom, melynek a gyöke. Ez formulával kifejezhető, és mivel p-nek csak véges sok gyöke van, ezért $a \in acl^{\mathcal{F}}(X)$. Fordítva, ha $a \in acl^{\mathcal{F}}(X)$, akkor akkor van egy $\varphi(v, \bar{x}) \in Form(L_X)$ formula és $n \in \omega$ úgy, hogy $\mathcal{F} \models \varphi(a, \bar{x})$ és $| \, ||\varphi(v, \bar{x})||^{\mathcal{F}}| = n$. Az előbb igazolt (1) szerint φ ekvivalens egy kvantormentes formulával, mely esetleg az X által generált résztest elemiből véges sokat paraméterként tartalmazhat. Nevezzük literálnak a 0-ra rendezett polinomegyenleteket, illetve ezek tagadásait. Könnyű meggondolni, hogy φ ilyen literálok diszjunkcióinak konjunkciójával ekvivalens. Mivel φ véges halmazt definiál, legalább az egyik konjunkciós tag szintén véges halmazt definiál. Az ebben szereplő literálok csak egyenletek lehetnek (vagyis nem lehetnek egyenletek tagadásai), mert az egyenletek tagadásai végtelen halmazokat definiálnak. Ez mutatja, hogy a gyöke egy, az X által generált test feletti nemtriviális polinomnak, azaz $a \in ACL^{\mathcal{F}}(X)$. ∎

Feladat. 1. Legyen $\mathcal{F}$ algebrailag zárt test és legyen $X \subseteq F$. Igazoljuk, hogy X modellelméleti értelemben akkor és csak akkor bázisa F-nek, ha X egy transzcendencia bázis, azaz olyan generátorrendszer, melynek minden eleme transzcendens a többi által generált test felett.

Most igazoljuk Steinitz klasszikus tételét.

6.64. Tétel. *(Steinitz.) Az adott karakterisztikájú, nem megszámlálható algebrailag zárt testek izomorfia erejéig egyértelműen léteznek.*

Bizonyítás. Csak az unicitással foglalkozunk; az egzisztenciát algebrai tanulmányainkból ismertnek tekintjük, és implicit módon eddig is használtuk már. Legyen $\kappa > \aleph_0$ tetszőleges számosság és legyenek $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ azonos karakterisztikájú, algebrailag zárt κ számosságú testek. Ha $X \in [F]^{<\omega}$ akkor a 6.5 (1) tétel bizonyítása szerint

$S_1^{\mathcal{F}}(X)$ megszámlálható. X felett azonos típusú, X felett algebrai elemből csak véges sok van, mert ezek benne vannak ugyanabban a véges, X felett definiálható relációban. Ezért F (és hasonlóan G) véges részhalmazai felett csak megszámlálható sok algebrai elem van.

A 6.59 tétel mintájára konstruálunk egy izomorfizmust a két test között. Legyen $F = \{a_i : i < \kappa\}$ és $G = \{b_i : i < \kappa\}$. Mivel $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ azonos karakterisztikájúak, prímtesteik között van egy f_0 izomorfizmus. Tegyük fel, hogy $j \leq \kappa$ és definiáltuk már az $\langle f_i : i < j \rangle$ leképezések egy növő sorozatát, melyekre teljesül, hogy minden $i < j$-re:

$|dom(f_i)| < |i| + \aleph_0$ egy résztest,

$\{a_k : k < i\} \subseteq dom(f_i)$,

$\{b_k : k < i\} \subseteq range(f_i)$.

Ha j limeszrendszám, akkor legyen $f_j = \cup_{i<j} f_i$, erre nyilván teljesülnek az előbbi kirovások. Végül tegyük fel, hogy $j = i + 1$ rákövetkező. Feladatunk f_i-t úgy kiterjeszteni, hogy a_i bekerüljön a kiterjesztés értelmezési tartományába és b_i az értékkészletébe.

Ha $a_i \in dom(f_i)$, akkor legyen $g = f_i$. Egyébként a_i vagy algebrai, vagy transzcendens $dom(f_i)$ felett. Az első esetben legyen p az a_i $dom(f_i)$ feletti minimálpolinomja; $f_i(p)$-nek van egy b gyöke $G - range(f_i)$-ben. Az algebrai testbővítések unicitástétele miatt f_i kiterjeszthető egy olyan g izomorfizmussá, melyre $dom(g) = dom(f_i)(a_i)$ és $g(a_i) = b$. Ha a_i transzcendens $dom(f_i)$ felett, akkor tekintsük $range(f_i)$ algebrai lezártját $\mathcal{G}$-ben. Mivel $|f_i| \leq |i| + \aleph_0$, ez az algebrai lezárt kisebb, mint κ, ezért van egy b transzcendens elem $G - range(f_i)$-ben. Mint előbb, a transzcendens testbővítések unicitástétele miatt f_i kiterjeszthető egy $dom(f_i)(a_i)$-n értelmezett, a_i-t b-re képező izomorfizmussá.

Az előző bekezdésben leírtakat alkalmazzuk g inverzére és b_i-re, az eredményül nyert kiterjesztés legyen f_j. Ez eleget tesz kikötéseinknek. Végül f_κ lesz a keresett izomorfizmus. ∎

Feladatok. 1 (csak algebristáknak, test-elmélet specialistáknak). Adjunk közvetlen bizonyítást arra, hogy két azonos karakterisztikájú algebrailag zárt test elemien ekvivalens.

2 (minden érdeklődőnek). Az előbbi feladat segítségével adjunk Steinitz előző tételére egy másik rövid bizonyítást a 6.59 (2) tételt alkalmazva.

Az algebrailag zárt testek nem $\aleph_0$-kategorikusak. Legyen ugyanis $\mathcal{F}$ a racionális test algebrai lezártja, és legyen $\mathcal{G}$ az a test, melyet $\mathcal{F}$-ből úgy kapunk, hogy adjungálunk hozzá egy transzcendens elemet és ennek vesszük az algebrai lezártját. Világos, hogy $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ is 0 karakterisztikájú megszámlálható, algebrailag zárt test. Mégsem izomorfak, ugyanis minden racionális szám definiálható bennük, ezért ha $f : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ egy izomorfizmus lenne, akkor f identikus lenne a racionális számok halmazán. Továbbá f racionális számok felett algebrai elemeket csak ilyen elemeken vehet fel értékül. Ezért $f|_{\mathcal{F}}$ már szürjektív lenne, tehát a $\mathcal{G}$-beli „extra" transzcendens elemnek nem találunk képet.

Most igazoljuk a Lefschetz-elvet.

6.65. Tétel. *(Lefschetz-elv.) Legyen φ egy elsőrendű formula (a gyűrűk nyelvén). Ekkor a következő két állítás ekvivalens.*

(1) A komplex számok testében igaz φ.

(2) Végtelen sok prímszámra teljesül, hogy φ igaz valamely p-karakterisztikájú algebrailag zárt testben.

Bizonyítás. Minden $i \in \omega$-ra legyen $\mathcal{A}_i$ egy p_i karakterisztikájú, megszámlálható algebrailag zárt test, ahol a p_i-k páronként különböző prímszámok. Legyen $\mathcal{U}$ egy reguláris ultraszűrő ω-n és legyen $\mathcal{A} = \Pi_{i\in\omega}\mathcal{A}_i/\mathcal{U}$. A 2.29 tétel szerint ekkor $|A| = 2^{\aleph_0}$, és mivel véges sok kivétellel egyik $\mathcal{A}_j$-nek sem p_i a karakterisztikája, ezért $\mathcal{A}$ 0-karakterisztikájú. Ezért a 6.64 tétel miatt a komplex számok teste izomorf $\mathcal{A}$-val.

Ha tehát (1) teljesül, akkor az előbbi izomorfizmust és a 2.19 tételt (Łoś tételét) használva adódik (2). Fordítva, ha (2) igaz, akkor a φ-t kielégítő véges karakterisztikájú testek megszámlálható elemi részeire áttérve és ezek ultraszorzatát képezve az előző bekezdés szerint, a komplex testtel izomorf testet kapunk. Mivel a felsorolt konstrukciók φ igazságát megőrzik, (1) is teljesülni fog. ∎

A fejezetet a Lefschetz-elv egy algebrai geomoetriai alkalmazásával folytatjuk. Legyen $\mathcal{F}$ egy test, egy $\mathcal{F}$ feletti sokváltozós polinom gyökeinek halmazát *algebrai sokaságnak* nevezzük. Polinomleképezésen egy olyan $f : {}^nF \to {}^mF$ függvényt értünk, melyhez vannak olyan $p_0, ..., p_{m-1}$ n-változós polinomok, hogy minden $\bar{x} \in {}^nF$-re $f(\bar{x}) = \langle p_0(\bar{x}), ..., p_{m-1}(\bar{x})\rangle$.

6.66. Tétel. *A komplex számok teste felett, ha f egy polinomleképezés, mely a V algebrai sokaságot injektíven képezi sajátmagába, akkor f szürjektív is V-n.*

Bizonyítás. Az f polinomleképezés V-vel együtt véges sok polinommal leírható, e polinomoknak összesen mondjuk n darab együtthatója van. Ha n-et rögzítjük, akkor állításunkat egy $\forall\exists$-formulával formalizálhatjuk: „akárhogy is veszünk n elemet, ha az ezekből az így és így definiált polinomleképezés az így és így definiált sokaságot injektíven képzi sajátmagába, akkor szürjektív is". Ezért azt kell igazolnunk, hogy minden n-re igazak az előbbi alakú $\forall\exists$-formulák.

Rögzítsük n-t és egy előző alakú φ formulát. A 6.65 Lefschetz-elv szerint azt kell belátni, hogy φ végtelen sok véges karakterisztikájú testben igaz. Legyen p tetszőleges és legyen $\mathcal{A}_p$ egy megszámlálható, p-karakterisztikájú algebrailag zárt test; megmutatjuk, hogy φ igaz $\mathcal{A}_p$-n.

Ha $\mathcal{B}$ egy véges test, akkor ezen φ igaz, mert véges V halmazokon minden V-t sajátmagába képző injektív függvény szürjektív is. Legyen $A_p = \{a_i : i < \omega\}$ és legyen $\mathcal{B}_i$ az $\{a_0, ..., a_{i-1}\}$ elemek által generált résztest $\mathcal{A}_p$-ben. Mivel $\mathcal{A}_p$ karakterisztikája véges, ezért mindegyik $\mathcal{B}_i$ véges és így igaz rajta φ. Végül $\mathcal{A}_p = \cup_{i\in\omega}\mathcal{B}_i$ és az 1.19 tétel miatt ez a láncképzés megőrzi a $\forall\exists$-formulák igazságát. Ezért $\mathcal{A}_p \models \varphi$, ahogy állítottuk. ∎

Végül Hilbert Nullhelytételének egy modellelméleti bizonyítását vázoljuk.

6.67. Tétel. *(Hilbert Nullhelytétele.)*
Legyen $\mathcal{F}$ algebrailag zárt test, $I \subseteq \mathcal{F}[x_1, ..., x_n]$ egy nemtriviális ideál és $f \in \mathcal{F}[x_1, ..., x_n]$. Ha f minden olyan pontban eltűnik, melyben I minden eleme eltűnik, akkor van olyan $k \in \omega$ melyre $f^k \in I$.

Bizonyítás. Csak vázoljuk a bizonyítást. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Ekkor a Zorn-lemma miatt van olyan J maximális I-t tartalmazó ideál, mely egyetlen $k \in \omega$-ra sem tartalmazza f^k-t. Igazolható, hogy ez a J egy prímideál (azaz, ha egy szorzat benne van, akkor valamelyik tényező is benne van). Ezért $\mathcal{F}[x_1, ..., x_n]/J$ egy integritási tartomány, legyen $\mathcal{G}$ ennek az integritási tartománynak a hányadosteste és legyen $\mathcal{H}$ a $\mathcal{G}$ algebrai lezártja. Ekkor $\bar{x}$ gyöke I minden elemének, de mivel f^k egyetlen $k \in \omega$-ra sincs I-ben, ezért $\bar{x}$ nem gyöke f-nek. Ismert, hogy J végesen generált ideál, mondjuk a $p_1, ..., p_r$ polinomok generálják. A 6.63 (1) tétel miatt $\mathcal{H}$-ban minden formula ekvivalens egy kvantormentessel; ezt használva igazolható, hogy $\mathcal{F}$ elemi része $\mathcal{H}$-nak. Ezért $\mathcal{F}$-ben is van olyan $\bar{a}$ mely nem gyöke f-nek, de gyöke mindegyik p_i-nek. Mivel $\{p_1, ..., p_r\}$ generálja J-t és $I \subseteq J$, ezért $\bar{a}$-n I mindegyik eleme eltűnik, de f nem, ez ellentmond a feltevésnek. ∎

A modellelméleti módszerek algebrai geometriában való alkalmazása jelenleg is aktív terület. Hrushovski és Pillay munkássága nyomán nagyon sok további kapcsolatra derült fény. Például, ha V irreducibilis algebrai sokaság egy algebrailag zárt test felett, akkor V definiálható halmaz, ezért a 6.5 (1) és 6.36 tételek és a 6.38 definíció miatt V-nek van Morley-rangja. Ez pontosan a V-n eltűnő polinomok (prím)ideáljának Krull-dimenziója (azaz az a legnagyobb szám, amilyen hosszú szigorúan növő prímideál-sorozat van, melynek az előbbi ideál az első (legkisebb) eleme).

A témakör szisztematikus tanulmányozása meghaladja a jegyzet kereteit, az érdeklődő olvasónak [2]-t ajánljuk; ebben részletesen ismertetik, hogyan oldotta meg Hrushovski modellelméleti módszerekkel az algebrai geometria egyik nevezetes régi problémáját, az úgynevezett Mordell-Lang sejtést. Ennek az eredménynek csak modellelméleti, stabilitáselméleti módszereket használó bizonyításai ismertek.

6.6. Kitekintés

Ebben a fejezetben a modellelmélet néhány további vizsgálati irányát vázoljuk, és kiegészítjük, perspektívába helyezzük eddigi eredményeinket. A kategoricitás fogalmának általánosításával, a spektrum-függvény bevezetésével kezdjük. Ezután igazoljuk Vaught tételét: egyetlen teljes és megszámlálható T elméletre sem teljesül, hogy pontosan két nem izomorf megszámlálhatóan végtelen modellje van. Ismertetjük Ehrenfeucht példáját is: van olyan T elmélet, melyre teljesül, hogy pontosan 3 nem izomorf megszámlálhatóan végtelen modellje van. A jegyzet befejezéseképpen Shelah klasszifikációs programját és ennek jelentőségét tekintjük át.

6.68. Definíció. *Legyen T egy elmélet és κ egy számosság. Ekkor $I(T,\kappa)$ a T, páronként nem izomorf, κ számosságú modelljeinek számossága. I-t spektrum-függvénynek nevezzük.*

Ezek szerint a T elmélet pontosan akkor $\aleph_0$-kategorikus, ha $I(T,\aleph_0)=1$, illetve Morley kategoricitás-tételét (pontosabban a 6.35 következményt) úgy is fogalmazhatjuk, hogy megszámlálható nyelven adott T elméletre és tetszőleges $\kappa > \aleph_0$-ra $I(T,\aleph_1)=1$ és $I(T,\kappa)=1$ ekvivalensek. Az I spektrum-függvénynek sok érdekes tulajdonsága van, most egy előkészületi lemma után Vaught tételét igazoljuk.

6.69. Lemma. *Legyen T egy teljes elmélet a megszámlálható L nyelven. T-nek akkor és csak akkor van megszámlálható szaturált modellje, ha minden $n \in \omega$-ra teljesül, hogy $|S_n(T)| \leq \aleph_0$.*

Bizonyítás. Ha T-nek $\mathcal{C}$ egy megszámłálható szaturált modellje, akkor minden $n \in \omega$-ra minden $p \in S_n(T)$ realizálható $\mathcal{C}$-ben. Mivel $\mathcal{C}$ megszámlálható, ezért $S_n(T)$ is megszámlálható.

Fordítva, most azt tegyük fel, hogy minden $n \in \omega$-ra $|S_n(T)| \leq \aleph_0$. Legyen $\mathcal{D} \models T$ egy $\aleph_0$-szaturált modell és legyen $\mathcal{D}_0$ ennek egy megszámlálható elemi része. Tegyük fel, hogy $n < \omega$ és definiáltuk már $\mathcal{D}$ megszámlálható elemi részeinek egy $\langle \mathcal{D}_j, j \leq n\rangle$ elemi láncát úgy, hogy minden $j < n$-re $\mathcal{D}_{j+1}$ szaturált $\mathcal{D}_j$ felett. Tetszőleges $X \in [D_n]^{<\omega}$ esetén $|S_1^{\mathcal{D}_n}(X)| \leq |S_{1+|X|}^{\mathcal{D}_n}(\emptyset)| = |S_{1+|X|}(T)|$ és ez utóbbi megszámlálható. Ezért $\mathcal{D}_n$ minden véges részhalmaza felett csak megszámlálható sok típus van és $\mathcal{D}$ $\aleph_0$-szaturáltsága miatt ezek mindegyike realizálható $\mathcal{D}$-ben. Mivel $|[D_n]^{<\aleph_0}| = \aleph_0$, ha D_n minden véges részhalmaza felett minden típust realizálunk, ez összesen megszámlálható sok elem. Vegyük e realizációkat D_n-hez, és ezzel a bővebb halmazzal generáljunk $\mathcal{D}$-ben egy megszámlálható elemi részt, ez legyen $\mathcal{D}_{n+1}$. Ekkor a 2.43 (1) tétel szerint a $\langle \mathcal{D}_n : n < \omega\rangle$ lánc limesze $\aleph_0$-szaturált lesz, és mivel mindegyik D_n megszámlálható, e limesz maga is megszámlálható. Tehát e limesz T egy megszámlálható szaturált modellje. ∎

6.70. Tétel. *(Vaught). Legyen L megszámlálható nyelv és T teljes elmélet L-ben. Ekkor $I(T,\aleph_0) \neq 2$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy T-nek mégis pontosan kettő nemizomorf megszámlálható modellje van; legyenek ezek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$. Legyen $\mathcal{D} \models T$ $\aleph_0$-szaturált. Legyen $n \in \omega$ tetszőleges. Ha $p \in S_n(T)$ akkor p realizálható $\mathcal{D}$-ben, a realizáció benne van $\mathcal{D}$ egy megszámlálható elemi részében, ez az elemi rész pedig vagy $\mathcal{A}$-val vagy $\mathcal{B}$-vel izomorf. Ezért $S_n(T)$ minden eleme realizálható T egy megszámlálható modelljében. Mivel ilyenből izomorfizmus erejéig csak kettő van, $|S_n(T)| = \aleph_0$. Így a 6.37 definíció előtti feladat szerint $S_n(T)$-ben az izolált pontok halmaza sűrű. Ezért a 4.8 tétel miatt T-nek van megszámlálható atomos modellje.

A 6.69 lemma miatt T-nek van megszámlálható szaturált modellje, legyen ez $\mathcal{A}$. A 2.44 tétel miatt ebbe T minden megszámlálható modellje elemien beágyazható. Ezért, ha $\mathcal{A}$ atomos lenne, akkor (az atomos modellek definíciója miatt) T minden megszámlálható modellje atomos lenne, és így az atomos modellek 4.9 unicitástétele miatt T $\aleph_0$-kategorikus lenne. Ezért $\mathcal{A}$ nem atomos. Mivel azonban a bizonyítás első bekezdése szerint T-nek van megszámlálható atomos modellje is, ez csak az $\mathcal{A}$-val nem izomorf $\mathcal{B}$ lehet.

A bizonyítás további részében meg fogjuk konstruálni T egy olyan megszámlálható modelljét, mely nem szaturált és nem atomos. E harmadik modell tehát sem $\mathcal{A}$-val, sem $\mathcal{B}$-vel nem lesz izomorf, ellentmondva $I(T, \aleph_0) = 2$-nek.

Mivel $\mathcal{A}$ nem atomos, realizálható benne egy nem izolált típus is, mondjuk $\bar{a} \in {}^nA$ olyan, hogy $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/\emptyset)$ nem izolált. Ekkor az $\mathcal{A}^+ = \langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$ szintén megszámlálható szaturált struktúra, ezért a 6.69 tétel miatt minden n-re $S_n(Th(\mathcal{A}^+))$ megszámlálható és így ezekben a terekben a 6.37 definíció előtti feladat szerint az izolált pontok halmaza sűrű. Ezért a 4.8 tétel miatt $Th(\mathcal{A}^+)$-nak van egy $\mathcal{C}^+ = \langle \mathcal{C}, \bar{c} \rangle$ megszámlálható atomos modellje. Világos, hogy $\mathcal{C} \models T$. Állítjuk, hogy ez T harmadik megszámlálható modellje.

$\mathcal{C}$ nem lehet atomos, mert $tp^{\mathcal{C}}(\bar{c}/\emptyset) = tp^{\mathcal{A}}(\bar{a}/\emptyset)$, ez a típus tehát $S_{|\bar{a}|}(T)$-ben nem izolált.

Továbbá ha $\mathcal{C}^+$ $\aleph_0$-kategorikus lenne, akkor az 5.13 tétel miatt $Aut(\mathcal{C}^+)$ automorfizmuscsoportja oligomorf lenne. Mivel $Aut(\mathcal{C}^+) \leq Aut(\mathcal{C})$, ebből az következne, hogy $\mathcal{C}$, és így T $\aleph_0$-kategorikus lenne. Ezért $\mathcal{C}^+$ nem $\aleph_0$-kategorikus. Vegyük észre, hogy $\mathcal{C}^+$ nem lehet szaturált a következők miatt.

Ha ugyanis $\mathcal{C}^+$ szaturált lenne, akkor a 2.44 tétel miatt $\mathcal{C}^+$ $\aleph_1$-univerzális lenne. Ezért, $\mathcal{C}^+$ atomossága miatt és az atomos modellek definíciója miatt, $Th(\mathcal{C}^+)$ minden megszámlálható modellje atomos lenne, és így az atomos modellek 4.9 unicitástétele miatt $\mathcal{C}^+$ $\aleph_0$-kategorikus lenne. Így $\mathcal{C}^+$ valóban nem szaturált.

De ekkor $\mathcal{C}$ sem lehet szaturált. ∎

Az előbbi tétel érdekes kontrasztját adja Ehrenfeucht alábbi tétele.

Feladatok. 1. Legyen $\mathcal{A} = \langle \mathbf{Q}, < \rangle$ a racionális számok halmaza a szokásos rendezéssel. Igazoljuk, hogy az $\bar{a}, \bar{b} \in {}^nA$ sorozatok pontosan akkor vannak $Aut(\mathcal{A})$ szerint azonos pályán, ha azonosan vannak rendezve.

2. Igazoljuk, hogy a végpont nélküli sűrű rendezések elmélete $\aleph_0$-kategorikus; és hogy az egy végponttal rendelkező sűrű rendezések elmélete $\aleph_0$-kategorikus.

6.71. Tétel. *(Ehrenfeucht.) Van olyan megszámlálható L nyelv és ezen egy teljes T elméletet, melyre $I(T, \aleph_0) = 3$.*

Bizonyítás. Legyen L az a nyelv, melyben „$<$" egy kétváltozós relációszimbólum és $\{c_n : n \in \omega\}$ konstansszimbólumok egy végtelen halmaza. Legyen T az az elmélet, mely szerint a $<$ egy végpont nélküli sűrű rendezés és minden $n \in \omega$-ra $c_n < c_{n+1}$. Állítjuk, hogy ennek a T-nek pontosan 3, páronként nem izomorf megszámlálható modellje van.

Most megmutatjuk, hogy $I(T, \aleph_0) \geq 3$. Ehhez megadunk 3 struktúrát. Mindhárom struktúra alaphalmaza legyen a racionális számok $\mathbf{Q}$ halmaza. Legyen minden $n \in \omega$-ra $c_n^{\mathcal{A}_1} = n$, $c_n^{\mathcal{A}_2} = 1 - 1/n$ és $c_n^{\mathcal{A}_3} = (1 + 1/n)^n$. Végül legyenek

$$\mathcal{A}_1 = \langle \mathbf{Q}, <, c_n^{\mathcal{A}_1} \rangle_{n\in\omega}, \qquad \mathcal{A}_2 = \langle \mathbf{Q}, <, c_n^{\mathcal{A}_2} \rangle_{n\in\omega}, \qquad \mathcal{A}_3 = \langle \mathbf{Q}, <, c_n^{\mathcal{A}_3} \rangle_{n\in\omega},$$

ahol $<$ a racionális számok szokásos rendezése. Az világos, hogy e három struktúra modellje T-nek. Továbbá $\langle c_n^{\mathcal{A}_1}, n \in \omega \rangle$ nem korlátos, míg a másik két struktúrában a c_n-ek korlátos sorozatot alkotnak. Emiatt $\mathcal{A}_1$ sem $\mathcal{A}_2$-vel sem $\mathcal{A}_3$-al nem izomorf. Végül tegyük fel, hogy $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_3$ egy izomorfizmus. Figyeljük meg, hogy ha $X \subseteq \mathbf{Q}$-ra $sup(X) \in \mathbf{Q}$, akkor $f(sup(X)) = sup\{f(x) : x \in X\}$. Ezért ekkor az $f(1)$ racionális szám lenne a $\{c_n^{\mathcal{A}_3}, n \in \omega\}$ halmaz szuprémuma. Ezért $\mathcal{A}_2$ és $\mathcal{A}_3$ sem izomorfak.

Legyen most $\mathcal{B} \models T$ egy megszámlálható struktúra. A tétel állítása előtti 2. feladat szerint B alaphalmaza rendezésizomorf a racionális számok halmazával, ezért feltehetjük, hogy $B = \mathbf{Q}$. A $\langle c_n^{\mathcal{B}}, n \in \omega \rangle$ sorozat, mivel szigorúan monoton növő, háromféle lehet:

(1) nem korlátos, vagy
(2) racionális számhoz konvergáló, vagy
(3) irracionális számhoz konvergáló.

Az (1) esetben a tétel előtti 2. feladat szerint a

$$(-\infty, c_0^{\mathcal{B}}],\ (c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}], ..., (c_n^{\mathcal{B}}, c_{n+1}^{\mathcal{B}}], ...$$

intervallumok rendre izomorfak a

$$(-\infty, a_0^{\mathcal{A}_1}],\ (a_0^{\mathcal{A}_1}, a_1^{\mathcal{A}_1}], ..., (a_n^{\mathcal{A}_1}, a_{n+1}^{\mathcal{A}_1}], ...$$

intervallumokkal, ezeknek az izomorfizmusoknak az uniója ad egy $\mathcal{B}$ és $\mathcal{A}_1$ közti izomorfizmust.

A (2) esetben legyen $b = \lim_{n\to\infty} c_n^{\mathcal{B}}$. Ekkor hasonlóan, a

$$(-\infty, c_0^{\mathcal{B}}],\ \ (c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}], ...\ (c_n^{\mathcal{B}}, c_{n+1}^{\mathcal{B}}], ..., [b, \infty)$$

intervallumok lesznek rendre izomorfak a

$$(-\infty, a_0^{\mathcal{A}_2}],\ \ (a_0^{\mathcal{A}_2}, a_1^{\mathcal{A}_2}], ..., (a_n^{\mathcal{A}_2}, a_{n+1}^{\mathcal{A}_2}], ...,\ [1, \infty)$$

intervallumokkal. Ezért ekkor $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}_2$.

A (3) esetben ismét legyen $b = \lim_{n\to\infty} c_n^{\mathcal{B}}$. Ekkor a

$$(-\infty, c_0^{\mathcal{B}}],\ \ (c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}], ...(c_n^{\mathcal{B}}, c_{n+1}^{\mathcal{B}}], ..., (b, \infty)$$

intervallumok lesznek rendre izomorfak a

$$(-\infty, a_0^{\mathcal{A}_3}],\ \ (a_0^{\mathcal{A}_3}, a_1^{\mathcal{A}_3}], ..., (a_n^{\mathcal{A}_3}, a_{n+1}^{\mathcal{A}_3}], ...(e, \infty)$$

intervallumokkal. Ezért ekkor $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}_3$.

Végül még T teljességét kell igazolni. Először is, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ és $\mathcal{A}_3$ elemien ekvivalensek, ugyanis, ha $\varphi(\bar{v})$ egy formula a rendezések nyelvén, akkor a tétel előtti 1. feladat szerint ha $\bar{x} \in ||\varphi(\bar{v})||^{\mathcal{Q}}$ és $\bar{y} \in \mathbf{Q}$ rendezésizomorf $\bar{x}$-el, akkor $\bar{y} \in ||\varphi(\bar{v})||^{\mathcal{Q}}$. Figyeljük meg, hogy ha L-ből kiválsztunk véges sok $\bar{c}$ konstansszimbólumot, ezek interpretáltjai $\mathcal{A}_1$-ben, $\mathcal{A}_2$-ben és $\mathcal{A}_3$-ban rendezésizomorfak lesznek, ezért egyszerre elégítik ki vagy teszik hamissá φ-t. Ha most $\mathcal{B}, \mathcal{C} \models T$ tetszőlegesek, akkor (mivel a c_n-ek interpretáltjai páronként különbözők), ezek végtelenek. $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ megszámlálható elemi részeit véve $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ vagy $\mathcal{A}_3$ egy izomorf másolatát kapjuk, melyek az előbbiek szerint elemien ekvivalensek. Ezért $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ is elemien ekvivalens, tehát T valóban teljes. ∎

Ismert, hogy minden $2 \neq n \in \omega$-hoz van olyan teljes T elmélet egy alkalmas megszámlálható nyelven, melyre $I(T, \aleph_0) = n$.

Az I spektrumfüggvénnyel kapcsolatos sok további érdekes eredmény és nyitott probléma ismert. Például a kérdés természetességéhez képest meglepően nehéz igazolni, hogy rögzített T elmélet esetén $I(T, \kappa)$ κ-ban monoton növő. Ez az állítás igaz, Shelah bizonyította. Vaught egy problémája a következő: ha T teljes elmélet egy megszámlálható nyelven, akkor

$$(*) \qquad \text{vagy } I(T, \aleph_0) \leq \aleph_0, \quad \text{vagy } I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0} \text{ (ennél nagyobb nem lehet).}$$

Ezzel kapcsolatban Morley bizonyította, hogy $I(T, \aleph_0) \leq \aleph_1$ vagy $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$ és Shelah egy másik eredménye szerint, ha T $\aleph_0$-stabil, akkor $(*)$ igaz. Shelah egyik további eredménye szerint, ha κ kellően nagy T számosságához képest, akkor

$$(**) \qquad \text{vagy } I(T, \aleph_k) \leq exp_{\omega_1}(\kappa + \omega) \quad \text{vagy } I(T, \aleph_\kappa) = 2^{\aleph_\kappa}$$

(az első mennyiség sokkal kisebb lehet, mint a második); itt $exp_0(\kappa) = \kappa, exp_{\alpha+1}(\kappa) = 2^{exp_\alpha(\kappa)}$ és $exp_\alpha(\kappa) = sup\{exp_\beta(\kappa) : \beta < \alpha\}$, ha α limeszrendszám.

Az ilyen eredményeket sorolhatnánk tovább is. A modellelmélet központi feladata az, hogy „megértsük" az elsőrendű formulahalmazok modelljeinek szerkezetét, vagyis, hogy át tudjuk tekinteni, mimódon válhatnak igazzá bizonyos formulák. A cél tehát valamiféle struktúratételek bizonyítása lenne, melyek segítségével osztályozhatjuk a lehetséges modelleket, átláthatjuk egymással való kapcsolatukat és, hogy hogyan konstruálhatók valamilyen elemi építőblokkokból. Vagy, ha ez a program keresztülvihetetlen, akkor igazoljuk, hogy bizonyos formulahalmazok modelljei elvileg áttekinthetetlenek és az előbbi jellegű struktúratételek elvileg nem létezhetnek, továbbá jellemezzük azokat a formulahalmazokat, melyek modelljeire bizonyíthatók struktúratételek és azokat is, melyekre ez reménytelen.

Ez a Shelah kezdeményezte ambíciózus „klasszifikációs" program valóban fontos és természetes, de sajnos nem elég konkrét. Nem világos, hogy mit jelent a modellek osztályozhatatlansága, mit jelent áttekinteni egy modellosztályt, mit jelent használható struktúratételeket bizonyítani, stb.

Az I (és más) spektrumfüggvények vizsgálatának jelentőségét az adja, hogy mintegy „melléktermékként", a bizonyítás részeként adódnak az előbbi struktúratételek, ugyanakkor a kérdések konkrétak annyira, hogy vizsgálatuk azonnal megkezdhető. Valóban, I vizsgálata közben sok esetben sikerült „használható" struktúratételeket nyerni bizonyos formulahalmazok modelljeire. A klasszifikációs programmal és a $(**)$-hoz hasonló eredményekkel kapcsolatban W. Hodges [9]-ben azt írja, hogy Arisztotelész óta ez a matematikai logika legnagyobb eredménye.

Általánosan elfogadott vélemény, hogy ha egy elméletnek adott számosságon a számossághoz képest sok modellje van, akkor ezek a modellek osztályozhatatlanok; szép, használható struktúratétel nem létezhet. Ez elsőre nem nyilvánvaló, hiszen attól, hogy sok modellt kell osztályozni, még elképzelhető, hogy van áttekinthető osztályozás. Ez a fajta osztályozhatatlanság tapasztalati tény, mely mögött végtelen halmazok kombinatorikájára vonatkozó, nehéz, sőt néhányszor ZFC-től független kérdések húzódnak meg.

Hivatkozások

[1] B. Bollobás, *Random Graphs,* Academic Press Inc, London, (1985).

[2] E. Bouscaren; szerkesztő, *Model Theory and Algebraic Geometry,* Lecture Notes In Mathematics 1696, Springer Verlag, Paris, (1999).

[3] C.C. Chang, J.K. Keisler, *Model theory,* North-Holland, Elsevier, (1992).

[4] L. Csirmaz, *Nemsztenderd analízis,* Typotex, (1999).

[5] H.D. Ebbinghaus, J. Flum, *Finite Model Theory,* Springer–Verlag, (1999).

[6] A. Hajnal, P. Hamburger, *Halmazelmélet,* Tankönyvkiadó, (1989).

[7] L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski, *Cylindric Algebras Part 1,* North–Holland, Amsterdam (1971).

[8] L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski, *Cylindric Algebras Part 2,* North–Holland, Amsterdam (1985).

[9] W. Hodges, *Model theory,* Cambridge University Press, (1997).

[10] W. Hodges, *A shorter model theory,* Cambridge University Press, (1997).

[11] A. Pillay, *An introduction to stability theory,* Clarendon press, Oxford, (1983).

[12] A. Pillay, *Geometric stability theory,* Clarendon press, Oxford, (1996).

[13] S. Shelah, *Classification theory,* North-Holland, Elsevier, (1990).

Tárgymutató