Matematikai képletek gyűjteménye (1. részlet)

2005/2006 tanév, tavaszi félév

Térvektorok

Jelölések: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Vektorműveletek.
$t\mathbf{v} = (tv_1, tv_2, tv_3) = tv_1\mathbf{i} + tv_2\mathbf{j} + tv_3\mathbf{k}$
$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\ |\mathbf{w}| \cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ és teljesül $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \iff \mathbf{v} \perp \mathbf{w}$
$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}|\ |\mathbf{w}| \sin(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{v}^2\mathbf{w}^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ merőleges $\mathbf{v}$-re és $\mathbf{w}$-re, és $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ jobbrendszert alkot. Teljesül $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0 \iff \mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$.
Azonosságok:
$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, $t(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (t\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (t\mathbf{w})$, $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}$, $(\mathbf{w} + \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
$\mathbf{vwu} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$, és teljesül $\mathbf{vwu} = \mathbf{wuv} = \mathbf{uvw} = -\mathbf{wvu} = -\mathbf{vuw} = -\mathbf{uwv}$.

Egyenes.
Ha $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ az egyenes egy rögzített pontja, $\mathbf{p} = (x, y, z)$ egy tetszőleges pontja és $\mathbf{v}$ az iránya, akkor
az egyenes paraméteres egyenlete: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$,
az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + tv_1 \\
y &= y_0 + tv_2 \\
z &= z_0 + tv_3
\end{aligned}
$$

Az egyenes egyenletrendszere (ha egyik koordinátasíkkal sem párhuzamos, (azaz $v_1v_2v_3 \neq 0$):

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Sík.
Ha $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a sík egy rögzített pontja, $\mathbf{p} = (x, y, z)$ egy tetszőleges pontja és $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ a normálvektora, akkor
a sík vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0$
a sík általános egyenlete $n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$ (vagy $n_1x + n_2y + n_3z = A$).

Méretes feladatok.
Két pont $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ távolsága:

$$d(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

Egy P és pont és e egyenes távolsága, ha Q és R az e két pontja: $d(P, e) = \frac{|PQ \times QR|}{|PQ|}$.
(Ugyanez síkban, ha $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ pont és $e : ax + by + c = 0$ egyenes: $d(\mathbf{p}, e) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.)
Egy $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ pont és $S : ax + by + cz + d = 0$ sík távolsága: $d(\mathbf{p}, S) = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
Kitérő e és f egyenesek távolsága, ahol E_1 és E_2 az e, F_1 és F_2 az f egyenesen van:

$$d(e, f) = \frac{(E_1E_2 \times F_1F_2) \cdot E_1F_1}{|E_1E_2 \times F_1F_2|}.$$

Az $ABCD$ paralelogramma területe: $|AB \times BC|$
Az ABC háromszög területe: $\frac{|AB \times BC|}{2}$
Egy $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes és egy $\mathbf{n}$ normálvektorú S sík szöge: $\sin(e, S) = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{n}|}$.

Elemi függvények

Polinomok.
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, ahol $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ (vagy $a_i \in \mathbb{C}$) és $a_n \neq 0$.
Rolle-gyöktétel: Ha $a_i \in \mathbb{Z}$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ és p, q relatív prím egészek, akkor $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.

Exponenciális és logaritmus függvény.
a^x definiált, ha $a > 0$, értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, értékkészlete a pozitív számok ($\mathbb{R}^+$), ha $a \neq 1$.
Ha $a > 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$.
$\log_a(x)$ definiált, ha $a > 0$, $a \neq 1$, értelmezési tartománya $\mathbb{R}^+$, értékkészlete $\mathbb{R}$.
Ha $a > 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a(x) = \infty$.
Teljesül minden x-re $\log_a(a^x) = x$ és $x > 0$-ra $a^{\log_a(x)} = x$.
Azonosságok:
$a^{x+y} = a^x a^y$, $(ab)^x = a^x b^x$, $(a^x)^y = a^{xy}$.
$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$, $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$.

Trigonometrikus, hiperbolikus függvények és inverzeik.
$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$, $\mathrm{cth}(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$.

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$
$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$	$\mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{ch}^2(x) = \mathrm{ch}(2x)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$	$\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)$
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$	$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$	$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$
$\sin(x) = \frac{2\mathrm{tg}(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)}$	$\cos(x) = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)}$
$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$	$\mathrm{sh}^2(x) = \frac{\mathrm{ch}(2x) - 1}{2}$
$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$	$\mathrm{ch}^2(x) = \frac{\mathrm{ch}(2x) + 1}{2}$
$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(a)\cos(b)$	$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(a)\sin(b)$
$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(a)\cos(b)$	$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(a)\sin(b)$,

az utóbbi négy egyenlőségnél $a = \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{x-y}{2}$, másképpen: $x = a + b$, $y = a - b$.

$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$	$\mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arcctg}(x) = \frac{\pi}{2}$
$\mathrm{arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathrm{arch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
$\mathrm{arth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\mathrm{arcth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$ $(\lvert x\rvert > 1)$
$\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$	$\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{th}(x) = 1$

Trigonometrikus függvények néhány konkrét értéke:

	$0°; 0$	$30°; \frac{\pi}{6}$	$45°; \frac{\pi}{4}$	$60°; \frac{\pi}{3}$	$90°; \frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
ctg	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Trigonometrikus függvények előjele:

térnegyed:	*I.*	*II.*	*III.*	*IV.*
sin	$+$	$+$	$-$	$-$
cos	$+$	$-$	$+$	$-$

Differenciálszámítás

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, illetve $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \varepsilon(x)(x-x_0)$, ahol $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	x^x $(x>0)$	$x^x(1+\ln(x))$
e^x	e^x	a^x	$a^x \ln(a)$
$\ln(x)$ $(x>0)$	$\frac{1}{x}$	$\log_a(x)$ $(x>0)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\mathrm{tg}(x)$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$	$\mathrm{ctg}(x)$ $(x \neq k\pi)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \mathrm{ctg}^2(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$	$\mathrm{cth}(x)$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)} = 1 - \mathrm{cth}^2(x)$
$\arcsin(x)$ $(\lvert x\rvert \leq 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$ $(\lvert x\rvert \leq 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arcctg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arsh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{arch}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{arth}(x)$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{arcth}(x)$ $(\lvert x\rvert > 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$

Deriválási szabályok.
$(f+g)' = f' + g'$, $(cf)' = cf'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.
Ha f inverze g, akkor $f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$.
Ha $f(x)$ paraméteres megadása $(x(t), y(t))$ és $\dot{x}(t) \neq 0$, akkor $f'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$, $f''(x) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\dot{x}^2(t)}$.

Függvények érintkezése.
$f(x)$ x_0-beli érintőjének egyenlete $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Az $f(x)$-hez tartozó nem függőleges aszimptoták egyenlete $y = mx + b$, ahol
$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ és $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$, a másik pedig $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ és $b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$.
$f(x)$ x_0-beli simulókörének egyenlete $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$, ahol
$v = f(x_0) + \frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$, $u = x_0 - f'(x_0)\frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$ és $r = \frac{\left(1+f'^2(x_0)\right)^{3/2}}{\lvert f''(x_0)\rvert}$.

Függvényvizsgálat.
Ha $n \in \mathbb{N}^+$ olyan, hogy $f^{(k)}(x_0) = 0$ minden $1 \le k < n$ esetén és $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, akkor

	$f^{(n)}(x_0) > 0$	$f^{(n)}(x_0) < 0$
n páros	x_0 minimum	x_0 maximum
n páratlan	f növő x_0-ban	f csökkenő x_0-ban

Ha $n \in \mathbb{N}^+$ olyan, hogy $f^{(k)}(x_0) = 0$ minden $2 \le k < n$ esetén és $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, akkor

	$f^{(n)}(x_0) > 0$	$f^{(n)}(x_0) < 0$
n páros	f konvex x_0-ban	f konkáv x_0-ban
n páratlan	x_0-ban inflexiós pont van	

Taylor-formula. (n fokú x_0 körüli Taylor-polinom, Lagrange-maradéktaggal):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \text{ ahol } \xi \in (x_0, x) \text{ vagy } \xi \in (x, x_0)$$

(Nevezetes függvények Taylor-sorait lásd a Sorok, sorozatok, függvénysorok című részben.)

Sorozatok, sorok, függvénysorok

Nevezetes határértékek:
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, ha $|q| < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$, ha $q > 1$; és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1$
Mértani sor n-edik részletlösszege: $\sum\limits_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, és ha $|q| < 1$, akkor $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, ha $\alpha > 1$ és divergens, ha $\alpha \le 1$.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$
Hatványsor konvergenciasugara: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$
Néhány függvény Maclaurin-sora (0 körüli Taylor-sora):

$e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad$ $\ln(x+1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, $-1 < x \le 1$
$\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\qquad$ $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$\mathrm{sh}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\qquad$ $\mathrm{ch}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\mathrm{arctg}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$ $\qquad$ $\mathrm{arth}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, ahol $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ (binomiális sor)

Fourier-sor: ha f egy $2p$ szerint periodikus függvény:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\right), \text{ ahol}$$

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)\mathrm{d}x, \qquad b_0 = 0,$$
$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\mathrm{d}x.$$

Integrál

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$	$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
x^n (ha $n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
e^x	e^x	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\mathrm{ctg}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathrm{th}(x)$	$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$	$-\mathrm{cth}(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}(x)$, vagy $-\mathrm{arcctg}(x)$	$\frac{1}{a^2+x^2}$ (ha $a \neq 0$)	$\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{1-x^2}$ (ha $\lvert x\rvert < 1$)	$\mathrm{arth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ (ha $\lvert x\rvert > 1$)	$\mathrm{arcth}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{arsh}(x)$		
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$, vagy $-\arccos(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{arch}(x)$

Integrálási szabályok. Legyen F az f egy primitív függvénye, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor
$\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x$, $\int f(x)+g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$,
$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ (ha $a \neq 0$),
$\int f'(x)f^n(x)\mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+c$ (ha $n \neq -1$), $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + c$, $\int g'(x)f\left(g(x)\right)\mathrm{d}x = F(g(x))+c$.

Parciális integrálás. $\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$
Néhány tipikus alkalmazás: Legyen $p(x)$ polinom, $t(x)$ a $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, e^x függvények valamelyike és $a(x)$ arcus vagy area függvény.

1. $t(ax+b)p(x)$ (annyi parciális integrálás, amennyi $p(x)$ foka)
2. $x^v \ln^n(x)$, ahol $n \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{R}$, $v \neq -1$ (n parciális integrálás, amennyi $p(x)$ foka)
3. $t_1(ax+b)t_2(cx+d)$ (két parciális integrálás)
4. $a(x)p(x)$

Helyettesítés. $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(u(t))u'(t)\mathrm{d}t$, ahol $x = u(t)$ invertálható.
Néhány tipikus alkalmazás:

1. $R(\sin(x), \cos(x))$. A helyettesítés $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$. Ekkor $x = 2\,\mathrm{arctg}(t)$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ és $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{1+t^2}$.
2. $R(e^x)$. A helyettesítés $e^x = t$. Ekkor $x = \ln(t)$ és $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}$.
3. $R(x, \sqrt{1-x^2})$. A helyettesítés $x = \sin(t)$. Ekkor $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$ és $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos(t)$.
4. $R(x, \sqrt{1+x^2})$. A helyettesítés $x = \mathrm{sh}(t)$. Ekkor $\sqrt{1-x^2} = \mathrm{ch}(t)$ és $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{ch}(t)$.
5. $R(x, \sqrt{x^2-1})$. A helyettesítés $x = \mathrm{ch}(t)$ $(x > 0)$. Ekkor $\sqrt{1-x^2} = \mathrm{sh}(t)$ és $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{sh}(t)$.

Egyszeres integrál alkalmazásai.

Görbe alatti terület az $[a, b]$ szakaszon: $\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Görbe alatti terület, paraméteres megadással: $\left|\int\limits_a^b \dot{x}(t)y(t)\mathrm{d}t\right|$.

Az $r(\varphi)$ által meghatározott szektor területe az $[\alpha, \beta]$ intervallumban: $\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

Szektor területe paraméteres megadással: $\frac{1}{2}\int\limits_a^b x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\mathrm{d}t$.

Görbe ívhossza: $\int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$.

Görbe ívhossza paraméteres megadással: $\int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\mathrm{d}t$.

Görbe ívhossza polárkoordinátás megadással: $\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi$.

Kettős és hármas integrál transzformációja.

Jacobi-determináns: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$, illetve $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$

Kétváltozós függvénynél $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ és így

$$\iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v;$$

három változósnál $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, ezzel

$$\iiint f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Néhány fontos változótranszformáció:

1. Polárkoordináták: $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, a Jacobi-determináns abszolút értéke r.
2. Hengerkoordináták: $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $z = m$, Jacobi-determináns abszolút értéke r.
3. Gömbi koordináták: $x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$, $z = r\cos(\vartheta)$, Jacobi-determináns abszolút értéke $r^2\sin(\vartheta)$.

Többváltozós függvények deriválása

$\mathbf{grad}(f) = (f'_x, f'_y, f'_z)$,
iránymenti derivált: $f'_{\mathbf{e}} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{grad}(f)$ (ha $|\mathbf{e}| = 1$),
$(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ irányban: $f'_\alpha = f'_x\cos(\alpha) + f'_y\sin(\alpha)$.
Összetett $f(u(x,y), v(x,y))$ függvény parciális deriválása: $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x$ és $f'_x = f'_u u'_y + f'_v v'_y$.
Teljes differenciál: $\mathrm{d}f = \mathbf{h}\cdot\mathbf{grad}(f)$ (két változóban: $\mathrm{d}f = f'_x\mathrm{d}x + f'_y\mathrm{d}y$).

Lokális szélsőérték.
Szükséges: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ (általában: $\mathbf{grad}(f)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$).
Elégséges: az előbbi és $f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - {f''_{xy}}^2(x_0, y_0) > 0$; $f''_{xx} > 0 \Rightarrow$ min; $f''_{xx} < 0 \Rightarrow$ max.
(többváltozós esetben a $J = (f''_{x_i x_j})$ mátrix bal felső sarokaldeterminánsait kell nézni: ha $+++\ldots$, akkor min, ha $-+-+\ldots$, akkor max)

Differenciálgeometria

Görbe	$\mathbf{r}(t)\quad t\in[a,b]$	(felületi) $\mathbf{r}(u,v)\quad u=u(t),\ v=v(t),\quad t\in[a,b]$
érintő irányvektora	$\dot{\mathbf{r}}(t)$	$\mathbf{r}'_u\dot{u}+\mathbf{r}'_v\dot{v}$
ívhossz	$\int\limits_a^b \lvert\dot{\mathbf{r}}(t)\rvert\,\mathrm{d}t$	$\int\limits_a^b \sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}\mathrm{d}t\quad (E={\mathbf{r}'_u}^2,\ F=\mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_v,\ G={\mathbf{r}'_v}^2)$

Felület	$\mathbf{r}(u,v)\quad (u,v)\in D$	$z=f(x,y)$	$f(x,y,z)=0$
normális	$\mathbf{n}=\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v(t)$	$\left(-f'_x,-f'_y,1\right)$	$\left(f'_x,f'_y,f'_z\right)$
felszín	$\iint\limits_D \lvert\mathbf{n}\rvert\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$	$\iint_T\sqrt{{f'_x}^2+{f'_y}^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$\iint_T\frac{\sqrt{{f'_x}^2+{f'_y}^2+{f'_z}^2}}{\lvert f'_z\rvert}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Kísérő triéder.

	ívhosszparaméterre	tetszőleges paraméterre
érintő	$\mathbf{t}(s)=\mathbf{r}'(s)$	$\mathbf{t}(t)=\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\lvert\dot{\mathbf{r}}(t)\rvert}$
főnormális	$\mathbf{f}(s)=\frac{\mathbf{r}''(s)}{\lvert\mathbf{r}''(s)\rvert}$	$\mathbf{f}(t)=\mathbf{b}(t)\times\mathbf{t}(t)$
binormális	$\mathbf{t}(s)\times\mathbf{f}(s)$	$\mathbf{b}(t)=\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)}{\lvert\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)\rvert}$

Simulósík egyenlete: $\det\begin{pmatrix} x-x(t_0) & y-y(t_0) & z-z(t_0)\\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0)\\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0)\end{pmatrix}=0$

Görbület: $G(t)=\frac{\lvert\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)\rvert}{\lvert\dot{\mathbf{r}}(t)\rvert^3}$, ívhosszparaméterrel $G(s)=\lvert\mathbf{r}''(s)\rvert$.

Torzió: $T(t)=\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)\ddot{\mathbf{r}}(t)\dddot{\mathbf{r}}(t)}{\lvert\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)\rvert^2}$, ívhosszparaméterrel $T(s)=\frac{\mathbf{r}'(s)\mathbf{r}''(s)\mathbf{r}'''(s)}{\lvert\mathbf{r}''(s)\rvert^2}$.

Vektor-vektor függvények

nabla operátor: $\boldsymbol{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, Laplace-operátor: $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Legyen $\mathbf{v}=\mathbf{v}(x,y,z)$ vektor-vektor függvény, $u=u(x,y,z)$ skalár-vektor függvény.

divergencia: $\mathrm{div}(\mathbf{v})=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$, rotáció: $\mathbf{rot}(\mathbf{v})=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}$.

Összefüggések:

$\mathrm{div}(\mathbf{grad}(u))=\Delta u$, $\mathrm{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{v}))=0$, $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}(u))=\mathbf{0}$, $\mathbf{grad}(\mathrm{div}(\mathbf{v}))=\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{v}))+\Delta\mathbf{v}$.

Görbementi integrál: $\int\limits_G\mathbf{v}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{dr}=\int\limits_a^b\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\mathrm{d}t$

Felületmenti integrál: $\int\limits_F\mathbf{v}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{dF}=\iint\limits_D\pm\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ (ahol $F:\ \mathbf{r}(u,v),\ (u,v)\in D$)

Stokes-tétel: $\int\limits_F\mathbf{rot}(\mathbf{v})(\mathbf{r})\cdot\mathbf{dF}=\oint\limits_G\mathbf{v}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{dr}$

Gauss–Osztogradszkij-tétel: $\int\limits_V\mathrm{div}(\mathbf{v})(\mathbf{r})\mathrm{d}V=\oint\limits_F\mathbf{v}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{dF}$