1. ZH

Mindegyik feladat 10 pontot ér.

1. Számoljuk ki az $X_{t+1} = (1/4)X_t + \varepsilon_{t+1}$ AR(1) folyamat spektrális sűrűségfüggvényét, ahol ε_t fehér zaj (0 várható érték, 1 szórás). Az Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ stacionárius folyamat spektrális mértéke $Q = \delta_0 + 5\delta_{\pi/2} + 5\delta_{-\pi/2}$, ahol δ_x az $\{x\}$ egy pontú halmazra koncentrált valószínűségi mértéket jelöli. Számoljuk ki Y kovarianciafüggvényét.

2. Az X_t ARMA folyamat eleget tesz a
$$X_t - \frac{1}{7}X_{t-1} = \varepsilon_t - \frac{1}{8}\varepsilon_{t-1},$$
rekurziónak, ahol ε_t fehér zaj. Adjuk meg $\hat{X}_{t+1}$-et, azaz az X_{t+1} legkisebb négyzetes értelemben legjobb lineáris közelítését az $(X_t, X_{t-1}, \ldots)$ múltból! Adjuk meg a végtelen soros előállítást illetve a rekurziót is!

3. Legyen S_t stacionárius folyamat 0 várható értékkel, melynek spektrális sűrűségfüggvénye
$$\phi_S(u) = 2e^{-|u|} - 1,\ u \in [-\pi, \pi],$$
legyen N_t tőle független fehér zaj, $EN_t = 0$, $EN_t^2 = 1$. Adjuk meg a Wiener-szűrő együtthatóit, amellyel $X_t := S_t + N_t$, $t \in \mathbb{Z}$-ből a legkisebb négyzetes hibával becsülhetjük meg S_0-t!

4. Az X_t ARMA folyamat eleget tesz a
$$X_t - \frac{1}{20}X_{t-1} - \frac{1}{20}X_{t-2} = \varepsilon_t,$$
rekurziónak, ahol ε_t fehér zaj. Adjuk meg X_t végtelen mozgóátlag előállítását ε_t-ből!

Assignment 1

Each question is worth 10 marks.

1. Calculate the spectral density of the AR(1) process $X_{t+1} = (1/4)X_t + \varepsilon_{t+1}$ where ε_t is white noise with 0 mean value and variance 1. The stationary process $Y_t,\ t \in \mathbb{Z}$ has spectral measure $Q = \delta_0 + 5\delta_{\pi/2} + 5\delta_{-\pi/2}$, where δ_x is the probability concentrated on the one-point set $\{x\}$.

2. The ARMA process X_t satisfies the recursion

$$X_t - \frac{1}{7}X_{t-1} = \varepsilon_t - \frac{1}{8}\varepsilon_{t-1},$$

where ε_t is white noise. Calculate $\hat{X}_{t+1}$, the mean-square best linear estimator of X_{t+1} from the past $(X_t, X_{t-1}, \ldots)$. Provide the infinite series as well as the corresponding recursion.

3. Let S_t be zero-mean stationary with spectral density

$$\phi_S(u) = 2e^{-|u|} - 1,\ u \in [-\pi, \pi],$$

N_t is a white noise independent from S_t, $EN_t = 0$, $EN_t^2 = 1$. Calculate the coefficients of the Wiener filter which estimates S_0 from $X_t := S_t + N_t$, $t \in \mathbb{Z}$ with the smallest mean square error.

4. The ARMA process X_t satisfies the recursion

$$X_t - \frac{1}{20}X_{t-1} - \frac{1}{20}X_{t-2} = \varepsilon_t,$$

with white noise ε_t. Construct the causal infinite moving average representation of X_t from ε_t.