

Megoldási javaslatok az 5. feladatsorhoz

1. Tekintsük az $E(\theta, \theta + 1)$ eloszláscsaládot és számoljuk ki a θ torzítatlan becslésének, $\lfloor X_1 \rfloor$ -nak a blackwellizáltját!

Megoldási javaslat: Ehhez az X_1 feltételes eloszlására van szükség az $X_1^* = c_1$, $X_2^* = c_2$ feltételek mellett. Vegyük észre, hogy ha a rendezett minta elemei $y_1, \dots, y_n$, akkor X_1 rájuk vonatkozó feltételes eloszlása egyenletes az $\{y_1, \dots, y_n\}$ halmazon (mivel folytonos az eloszlás, feltehető, hogy ezek mind különböző értékek). Innen

$$P(X_1 = c_1 | X_1^* = c_1, X_2^* = c_2) = P(X_1 = c_2 | X_1^* = c_1, X_2^* = c_2) = 1/n.$$

Az 1. feladatsor 7. feladatát kétszer alkalmazva látjuk, hogy $(X_2^*, \dots, X_{n-1}^*)$ feltételes eloszlása $X_1^* = c_1$, $X_2^* = c_2$ mellett ugyanaz, mint a $[c_1, c_2]$ -n egyenletes eloszlásból vett $(n-2)$ elemű rendezett mintáé.

Kis kitérő: leellenőrizhető az 1. feladatsorból, hogy ha f_k a $[0, 1]$ -en egyenletes rendezett minta k elemének sűrűségfüggvénye, akkor $\sum_{k=1}^n f_k = \text{konstans}$. Ezt a $[c_1, c_2]$ -n alkalmazva kijön, hogy X_1 feltételes eloszlása $X_1^* = c_1$, $X_2^* = c_2$, $X_1 \neq X_1^*$, $X_1 \neq X_n^*$ feltételek mellett egyenletes a $[c_1, c_2]$, hiszen a (feltételes) sűrűségfüggvénye az $X_2^*, \dots, X_{n-1}^*$ sűrűségfüggvényeinek azonos súlyokkal vett lineáris kombinációja, ezek összege pedig a fentiek szerint konstans.

Száz szónak is egy a vége, a kérdéses blackwellizált az $\lfloor X_1 \rfloor$ feltételes várható értéke, tehát:

$$\frac{\lfloor X_1^* \rfloor + \lfloor X_n^* \rfloor}{n} + \frac{\int_{X_1^*}^{X_n^*} \lfloor x \rfloor dx}{X_n^* - X_1^*}.$$

2. Geometriai eloszlásból veszünk n elemű mintát (p a paraméter). Adjunk torzítatlan becslést p -re az $X_1 + \dots + X_n$ elégséges statisztika függvényében! (Segítség: számoljuk ki $1/(X_1 + \dots + X_n - 1)$ várható értékét.)

Megoldási javaslat: Megbeszéltük.

3. Legyen n elemű mintánk egy olyan eloszlásból, melynek a sűrűségfüggvénye a $[0, \theta]$ intervallumon $4x^3/\theta^4$, máshol 0. Adjunk elégséges statisztikát, majd torzítatlan becslést θ -ra egyrészt az elégséges statisztika, másrészt az átlag segítségével. Melyiknek becslésnek kisebb a négyzetes hibája (=a szórása)?

Megoldási javaslat: Felírva a minta együttes sűrűségfüggvényét, világosan látszik, hogy X_n^* elégséges statisztika. Mivel $E_\theta[(X_1 + \dots + X_n)/n] = 0.8\theta$, innen kijön, hogy $T_1 = 5(X_1 + \dots + X_n)/4n$ torzítatlan becslés.

$$D^2(X_1) = EX_1^2 - (EX_1)^2 = \int_0^\theta \frac{4x^5}{\theta^4} dx - \frac{16\theta^2}{25} = \frac{2\theta^2}{75},$$

innen $D^2(T_1) = \theta^2/24n$.

Másrészt az X_n^* sűrűségfüggvénye (1. feladatsor)

$$nF_\theta^{n-1}(x)f_\theta(x),$$

ahol f_θ az X_1 sűrűségfüggvénye, $F_\theta(x) = x^4/\theta^4$ pedig az eloszlásfüggvénye. Innen

$$EX_n^* = \int_0^\theta xn \frac{x^4}{\theta^4} \frac{4x^3}{\theta^4} dx = \frac{4n}{4n+1}\theta,$$

ahonnan $T_2 := \frac{4n+1}{4n}X_n^*$ is torzítatlan becslés, amire

$$D^2T_2 = \int_0^\theta \frac{4nx^{4n+1}}{\theta^{4n}} dx - \left(\frac{4n\theta}{4n+1} \right)^2 = \frac{4n\theta^2}{(4n+2)(4n+1)^2},$$

ahonnan $D^2(T_2) = \frac{\theta^2}{4n(4n+2)}$, tehát az utóbbi becslés szórása kisebb.

4. Legyen n elemű mintánk olyan, hogy $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \alpha$, $P(X_1 = 3) = 1 - 2\alpha$ valamely $0 < \alpha < 1/2$ paraméterre. Adjunk X_1 függvényeként torzítatlan becslést α -ra! Keressünk elégséges statisztikát, majd blackwellizáljuk az előző becslést.

Megoldási javaslat: A $T_1 := 1_{X_1=1}$ torzítatlan (de buta) becslés. A valószínűségek $P(X_i = x_i, i = 1, \dots, n) = \frac{n!}{n_1!n_2!(n-n_1-n_2)!} \alpha^{n_1+n_2} (1-2\alpha)^{n-n_1-n_2}$, ahol n_1 az egyesek, n_2 pedig a kettesek száma az $x_1, \dots, x_n$ sorozatban. Tehát $(n_1 + n_2)(X_1, \dots, X_n)$ elégséges statisztika. Legyen n'_1 ill. n'_2 az egyesek ill. kettesek száma az $X_2, \dots, X_n$ sorozatban. Akkor a blackwellizáláshoz ki kell számítani

$$E(T_1 | n_1 + n_2 = k) = \frac{P(X_1 = 1, n'_1 + n'_2 = k-1)}{\binom{n}{k} (2\alpha)^k (1-2\alpha)^{n-k}} = \frac{\alpha \binom{n-1}{k-1} (2\alpha)^{k-1} (1-2\alpha)^{n-k}}{\binom{n}{k} (2\alpha)^k (1-2\alpha)^{n-k}} = k/2n$$

vagyis $T_2 = (n_1 + n_2)/2n$ a blackwellizált statisztika.

5. Egy készülék élettartama exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Elindítunk n gépet és figyeljük, hány működik még a t időpontban. Mekkora a megfigyelésünk Fisher-információja? Mely t -re lesz maximális?

Megoldási javaslat: Az n elemű minta Fisher-információja $nI_1(\lambda)$, ahol $I_1(\lambda)$ az egyelemű mintáé. Persze most $P(X_1 = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$, $P(X_1 = 1) = e^{-\lambda t}$, ahol $X_1 = 1$ ha megy még az első gép, és 0, ha már nem. Láttuk, hogy a p paraméterű indikátor Fisher-információja $p^{-1}(1-p)^{-1}$. A kompozíciófüggvény deriválási szabály miatt a Fisher-információ tehát most

$$I_1(\lambda) = (g'(\lambda))^2 \frac{1}{p(1-p)} \Big|_{p=g(\lambda)},$$

ahol $g(\lambda) = e^{-\lambda t}$. Innen kijön

$$I_1(\lambda) = \frac{t^2}{e^{\lambda t} - 1} = \frac{(\lambda t)^2}{(e^{\lambda t} - 1)\lambda^2}.$$

Ezt numerikusan lehet λt -ben maximalizálni, kb. $\lambda t = 1.59$ jön ki, ahonnan az optimális t kb. $1.59/\lambda$.

Bónusz, a 4. feladatsor 1. feladata:

Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta. Legyen

$$Y_1 = \frac{X_1^*}{X_2^*}, \quad Y_2 = \left(\frac{X_2^*}{X_3^*} \right)^2, \quad \dots, \quad Y_{n-1} = \left(\frac{X_{n-1}^*}{X_n^*} \right)^{n-1}, \quad Y_n = (X_n^*)^n.$$

Mutassuk meg, hogy $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ eloszlása megegyezik $X_1, X_2, \dots, X_n$ eloszlásával.

Megoldási javaslat: Tekintsük a $(z_1, \dots, z_n) \rightarrow (z_1/z_2, (z_2/z_3)^2, \dots, z_n^n)$ transzformációt. Ez a $H = \{(z_1, \dots, z_n) : 0 < z_1 < \dots < z_n < 1\}$ halmazt a $(0, 1)^n$ -be képezi bijektíven. Mivel a $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ eloszlása egyenletes a H -n, ezért az $(Y_1, \dots, Y_n)$ is egyenletes lesz $(0, 1)^n$ -en. Ellenőrizzük le a konstans azért, vagyis nézzük meg a deriváltmátrix determinánsát! Mivel ez alsó háromszögmátrix, az átlón pedig $1/z_2, 2z_2/z_3^2, \dots, nz^{n-1}$ állnak, ezért a determináns inverze $1/n!$, ahogyan lennie kell.