

2. feladatsor megoldási javaslatok

Csak az utolsó feladatot nem beszéltük meg:

Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ exponenciális eloszlásból vett minta, és $Y_1 = nX_1^*, Y_2 = (n-1)(X_2^* - X_1^*), \dots, Y_{n-1} = 2(X_{n-1}^* - X_{n-2}^*), Y_n = X_n^* - X_{n-1}^*$.

- (a) Mutassuk meg, hogy $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ eloszlása megegyezik $X_1, X_2, \dots, X_n$ eloszlásával.
(b) Határozzuk meg az $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ rendezett minta várható értékét és kovarianciamátrixát.

Megoldási javaslat: Csak 1 paraméterű exponenciális eloszlásra nézzük meg. A $H = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 < \dots < x_n\}$ halmazt bevezetve tudjuk, hogy az $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ együttes sfgvénye

$$n!e^{-x_1} \dots e^{-x_n} 1_H.$$

Viszont a $(Y_1, \dots, Y_n)$ -re való áttérés deriváltmátrixa alsó háromszögmátrix, melyen a főátló elemeinek szorzata $n!$, tehát ez a determináns, amivel *osztani* kell amikor az $(Y_1, \dots, Y_n)$ együttes sfgvényét felírjuk. A H halmaz képe $(0, \infty)^n$, ezért tehát a keresett együttes sfgvény $y_i \in (0, \infty), i = 1, \dots, n$ -re:

$$e^{-y_1 - y_2 - \dots - y_n},$$

hiszen $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$ az új koordinátákra való áttérésnél.

Ezek után tudjuk, hogy $EY_i = 1$ minden i -re, valamint az Y_i -k függetlenek. Innen $EX_1^* = 1/n, EX_2^* = 1/n + 1/(n-1)$, stb. Megkaptuk a várható értékeket. A kovarianciákkal most nem vessződünk, de megnézzük a szórásnégyzeteket. $EY_i^2 = 2$, ennek fényében $E(X_1^*)^2 = 2/n^2$, tehát $D^2(X_1^*) = 1/n^2$. Függetlenségből

$$D^2(X_2^*) = D^2(Y_1/n + Y_2/(n-1)) = D^2(Y_1/n) + D^2(Y_2/(n-1)) = 1/n^2 + 1/(n-1)^2.$$

Etc.