

1. feladatsor megoldási javaslatok

- (1) Legyen X véletlen vektor Σ kovarianciamátrixszal, $EX = 0$. Mutassuk meg, hogy ha $\text{rang}(\Sigma) = r$, akkor

(a) Létezik X -nek r olyan koordinátája, hogy az összes többi koordinátája ezek lineáris függvénye.

(b) Létezik egy olyan r dimenziós S hipersík, amelyre $\mathbb{P}(X \in S) = 1$. (Megjegyzés: $S = \text{im}(\Sigma)$).

Megoldási javaslat: Legyen X d -dimenziós. Kiveszünk $X_{l_1}, \dots, X_{l_m}$ koordinátákat, melyek kovarianciamátrixa a lehető legnagyobb (teljes) ranggal rendelkezik. Ebből persze $m \leq r$ azonnal jön. Feltehető, hogy $l_i = i$, hiszen a koordináták permutálása nem változtatja meg a mátrix rangját. Ha az X_{m+1} -et is hozzávennénk a koordinátákhoz, akkor már nem nőne a rang (a maximalitás miatt). Legyen ez a mátrix Σ_{m+1} . Tehát valamely $\beta \neq 0$ vektorra $\beta_{m+1}^T \Sigma_{m+1} \beta_{m+1} = 0$, amiből $D^2(\beta_{m+1}^T [X_1, \dots, X_m]^T) = 0$, tehát a benti lineáris kombináció 0, vagyis X_{m+1} kifejezhető a korábbi koordináták lineáris kombinációjaként. Indukcióval ez X_j , $j \geq m+1$ -re is igaz. Akkor azonban a fenti β_j , $j \geq m+1$ -ekből találtunk $d-m$ vektort, melyekre igaz, hogy $[X_1, \dots, X_d]$ 1 valószínűséggel rájuk merőleges. Innen persze $r \leq d - (d-m)$, azaz $r = m$, és a második állítás is adódik.

- (2) Legyen X valószínűségi vektor véges kovarianciával és $\mathcal{F}$ egy σ -algebra. Mutassuk meg, hogy

$$\text{cov}(X) = \mathbb{E}[\text{cov}(X | \mathcal{F})] + \text{cov}(\mathbb{E}[X | \mathcal{F}]),$$

ahol $\text{cov}(X | \mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X | \mathcal{F}])(X - \mathbb{E}[X | \mathcal{F}])^T | \mathcal{F}]$ a feltételes kovarianciamátrixot jelöli.

Megoldási javaslat: 1 dimenzióban egyszerű számolás, felhasználva a feltételes várható érték tulajdonságait. Észrevesszük, hogy ha $\alpha \in \mathbb{R}^d$, akkor $\alpha^T \text{cov}(X) \alpha = D^2(\alpha^T X)$, stb, tehát a többdimenziós eset visszavezethető az egydimenziósra.

- (3) Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ egy f sűrűségfüggvényű és F eloszlásfüggvényű abszolút folytonos eloszlásból vett minta (független és azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata), és jelölje az eredeti mintából képzett rendezett mintát: $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.

Határozzuk meg a rendezett minta (együttes) sűrűségfüggvényét.

Megoldási javaslat: Mivel az eloszlás folytonos, $P(X_1^* = X_2^*) = 1$, stb, tehát az eloszlás a $H = \{(y_1, \dots, y_n) : y_1 < y_2 < \dots < y_n\}$ halmazra koncentrálódik. Legyenek $A_1, \dots, A_n$ kicsi, nem átfedő intervallumok egy fix sorozat, $y_1 < \dots < y_n$ körül.

$$\begin{aligned} P(X_j^* \in A_j, j = 1, \dots, n) &= \sum_{\pi \text{ permutacio}} P(X_{\pi(j)} \in A_j, j = 1, \dots, n) \\ &= n! \prod_{j=1}^n \int_{A_j} f(x) dx, \end{aligned}$$

ahol $f(x)$ az X_1 sűrűségfüggvénye. Ha az A_j intervallumok egy pontra szűkülnek, ebből adódik, hogy az $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ sűrűségfüggvénye éppen:

$$g(y_1, \dots, y_n) = n! \prod_{j=1}^n f(y_j) 1_H,$$

ahol 1_H a H indikátora.

- (4) Határozzuk meg az $X_{(k)}$ változó (perem) eloszlás- és sűrűségfüggvényét. Nézzük meg azt az esetet, amikor X_1 egyenletes a $[0, 1]$ -en.

Megoldási javaslat: Az órán kiszámoltuk, hogy ha F, f az X_1 eloszlás- ill. sűrűségfüggvénye, akkor $P(X_k^* < x) = \sum_{j=k}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} F^j(x) (1 - F(x))^{n-j}$. Ebből deriválással kapjuk (sok tag kiesik), hogy az X_k^* sűrűségfüggvénye, g_k :

$$g_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x) F^{k-1}(x) (1 - F(x))^{n-k}.$$

Ha X_1 egyenletes a $[0, 1]$ -en, akkor

$$g_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

- (5) Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ exponenciális eloszlásból vett minta, $S_i = X_1 + \dots + X_i$, továbbá $Y_i = S_i/S_n$, $1 \leq i \leq n-1$. Határozzuk meg $Y_1, \dots, Y_{n-1}, S_n$ együttes sűrűségfüggvényét! Mutassuk meg, hogy $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ eloszlása olyan, mint a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett $n-1$ elemű rendezett mintáé.

Megoldási javaslat: Ezt megnéztük az órán alaposan: két sűrűségtranszformáció után adódott az állítás.

- (6) Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta, határozzuk meg a rendezett minta várható értékét.

Megoldási javaslat: A kettővel fentebbi példa szerint

$$EX_k^* = \int_{[0,1]} x \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx.$$

Ennél egyszerűbb az, ha tekintjük $Z_i = X_i/S_{n+1}$ -et az előző feladatból, $i = 1, \dots, n+1$. Nyilván ezek mindegyikének ugyanannyi a várható értéke és $\sum_{i=1}^{n+1} Z_i = 1$. Másrészt $Y_j = \sum_{i=1}^j Z_i$, tehát $EZ_i = 1/(n+1)$, tehát $EX_k^* = EY_k = k/(n+1)$, $k = 1, \dots, n$.

Innen azt a hasznos állítást is megkaptuk, hogy

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}, \quad (1)$$

azaz kiszámoltuk az ún. béta-integrál értékét.

- (7) Mutassuk meg, hogy az $X_{(k)} = t$ feltétel mellett $X_{(1)}, \dots, X_{(k-1)}$ és $X_{(k+1)}, \dots, X_{(n)}$ független, az előbbi eloszlása olyan, mint egy $k-1$ elemű rendezett mintáé az $f_1(x) = \frac{f(x)}{F(t)} \mathbb{I}(x < t)$ sűrűségfüggvényű eloszlásból, míg az utóbbi eloszlása olyan, mint egy $n-k$ elemű rendezett mintáé az $f_2(x) = \frac{f(x)}{1-F(t)} \mathbb{I}(t < x)$ sűrűségfüggvényű eloszlásból.

Megoldási javaslat: Megbeszéltük alaposan.

- (8) Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta, határozzuk meg a rendezett minta kovarianciamátrixát is.

Megoldási javaslat: Először vegyük észre, hogy az (1)-ből következik, hogy

$$E[(X_k^*)^2] = \int_{[0,1]} x^2 \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx = \frac{k(k+1)}{(n+2)(n+1)}.$$

Innen $D^2(X_k^*) = \frac{k(n+1-k)}{(n+2)(n+1)^2}.$

Vegyük észre, hogy az 5. feladatból következik, hogy $X_k^* - X_j^*$ eloszlása $k > j$ -re ugyanaz, mint X_{k-j}^* eloszlása. Innen pedig

$$D^2(X_{k-j}^*) = D^2(X_k^* - X_j^*) = D^2(X_k^*) + D^2(X_j^*) - 2\text{cov}(X_k^*, X_j^*),$$

Itt a kovariancia kivételével már mindent ismerünk, tehát a kovariancia is kijön:

$$\frac{j(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{kj}{(n+1)^2}.$$