

Statisztika gyakorlat, 4. feladatsor

Teljes statisztika: A $T(X)$ statisztika *teljes*, ha tetszőleges $\varphi(T)$ függvényére $E_{\vartheta}(\varphi(T)) = 0, \forall \vartheta \in \Theta$, pontosan akkor, ha $\varphi(T) = 0$ $\mathcal{P}$ -m.m.

Blackwellizálás: Legyen S elégséges statisztika. A ϑ paraméter $g(\vartheta)$ függvényére adott T torzítatlan becslés *blackwellizáltja* a $T' = E_{\vartheta}(T|S)$ becslés. Ez is torzítatlan és $D_{\vartheta}^2(T') \leq D_{\vartheta}^2(T), \forall \vartheta \in \Theta$. Ha S teljes is, akkor T' *hatásos*, azaz $D_{\vartheta}^2(T') \leq D_{\vartheta}^2(Z)$ minden θ -ra és minden torzítatlan Z -re.

1. Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta.

Legyen

$$Y_1 = \frac{X_1^*}{X_2^*}, \quad Y_2 = \left(\frac{X_2^*}{X_3^*}\right)^2, \quad \dots, \quad Y_{n-1} = \left(\frac{X_{n-1}^*}{X_n^*}\right)^{n-1}, \quad Y_n = (X_n^*)^n.$$

Mutassuk meg, hogy $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ eloszlása megegyezik $X_1, X_2, \dots, X_n$ eloszlásával.

2. p paraméterű geometriai eloszlású mintánál adjunk egyszerű torzítatlan becslést $p(1-p)$ -re, majd blackwellizáljuk!
3. n elemű Poisson mintánál adjunk egyszerű becslést $e^{-\lambda}$ -ra, majd blackwellizáljuk.
4. Vegyünk egy n elemű mintát a $0 < p < 1$ paraméterű indikátoreloszlásból.
 - (a) Adjunk $g(p) = p^k$ -ra egyszerű torzítatlan becslést ($k \leq n$).
 - (b) Blackwellizálással adjunk hatásos becslést $g(p)$ -re!
5. A $(0, \vartheta)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett n elemű minta esetén blackwellizáljuk a $\vartheta > 0$ paraméter $T(X) = (n+1)X_1^*$ becslését. Hatásos-e?
6. Számítsuk ki a Fisher-információt a következő eloszláscsaládokból vett n elemű minta esetén:
 - (a) Poisson(λ), $\lambda > 0$ paraméter,
 - (b) binomiális(r, p), r ismert, $0 < p < 1$ paraméter,
 - (c) geometriai p paraméterrel,
 - (d) gamma(α, λ), $\alpha > 0$ ismert, $\lambda > 0$ paraméter,
 - (e) $N(\vartheta, \vartheta^2)$, ($\vartheta > 0$) paraméter.