

Statisztika gyakorlat, 2. feladatsor

Elégséges statisztika: Legyen X minta. A $T(X)$ statisztika *elégséges* a ϑ paraméterre, ha a minta sűrűségfüggvénye felírható a következő faktorizált alakban: $f_{\vartheta}(x) = h(x)g_{\vartheta}(T(x))$.

- Keressünk elégséges statisztikát a következő eloszláscsaládokból vett n elemű minta esetén.
 - Poisson(λ), $\lambda > 0$ paraméter,
 - binomiális(m, p), m ismert, $0 < p < 1$ paraméter,
 - negatív binomiális(r, p), r ismert, $0 < p < 1$ paraméter,
 - gamma(α, λ), $\alpha > 0$ ismert, $\lambda > 0$ paraméter,
 - $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméter,
 - $N(\mu, \sigma^2)$, μ ismert, $\sigma > 0$ paraméter,
 - $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ paraméter, σ ismert.
 - $E(a, b)$, $a < b$ paraméterek,
 - $E(-\vartheta, \vartheta)$, $\vartheta > 0$ paraméter,
 - $E(\vartheta, 2\vartheta)$, $\vartheta > 0$ paraméter.
 - béta(a, b), $a, b > 0$ paraméterek,
 - béta(a, b), a ismert, $b > 0$ paraméter,
 - Cauchy-eloszlás eltolásparaméteres családja: $f_{\vartheta}(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \vartheta)^2)}$, ahol ϑ valós paraméter.
- Legyen $X_1, \dots, X_n$ az $N(m, 4)$, $Y_1, \dots, Y_n$ pedig az $N(m, 25)$ eloszlásból származó független minta. (A második paraméter a szórásnégyzetet jelöli.)
 - Adjuk meg a legkisebb szórású $a\bar{X} + b\bar{Y}$ alakú torzítatlan becslést m -re!
 - Mutassuk meg, hogy ez az (egydimenziós) elégséges statisztika függvénye!
- Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ az
$$f_{\mu, \sigma}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{x - \mu}{\sigma} \right\} & \text{ha } x \geq \mu \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$
sűrűségfüggvényű eloszlásból származó minta, ahol μ valós, σ pozitív paraméter. Adjunk a (μ, σ) párra elégséges statisztikát!
- Egy gép deszkákat vág, melyek hossza egyenletes eloszlású 1 méter és 2 méter között. A gépet azonban Furiosországban működtetik, ahol furiméterben mérik a hosszúságokat: 1 méter = a furiméter, ahol a ismeretlen paraméter. Ha n levágott deszka hossza rendre $X_1, \dots, X_n$ furiméter, akkor a következők közül melyek lesznek elégséges statisztikák a -ra?
 - a rendezett minta, b) a mintaátlag, c) (X_1^*, X_n^*) , d) X_1 , e) a mintaterjedelem.
- Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ exponenciális eloszlásból vett minta, és $Y_1 = nX_1^*, Y_2 = (n - 1)(X_2^* - X_1^*), \dots, Y_{n-1} = 2(X_{n-1}^* - X_{n-2}^*), Y_n = X_n^* - X_{n-1}^*$.
 - Mutassuk meg, hogy $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ eloszlása megegyezik $X_1, X_2, \dots, X_n$ eloszlásával.
 - Határozzuk meg az $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ rendezett minta várható értékét és kovarianciamátrixát.