

1. feladatsor, matematikai statisztika, 2023. február 27.

- (1) Legyen X véletlen vektor Σ kovarianciamátrixszal, $EX = 0$. Mutassuk meg, hogy ha $\text{rang}(\Sigma) = r$, akkor

(a) Létezik X -nek r olyan koordinátája, hogy az összes többi koordinátája ezek lineáris függvénye.

(b) Létezik egy olyan r dimenziós S hipersík, amelyre $\mathbb{P}(X \in S) = 1$. (Megjegyzés: $S = \text{im}(\Sigma)$).

- (2) Legyen X valószínűségi vektor véges kovarianciával és $\mathcal{F}$ egy σ -algebra. Mutassuk meg, hogy

$$\text{cov}(X) = \mathbb{E}[\text{cov}(X | \mathcal{F})] + \text{cov}(\mathbb{E}[X | \mathcal{F}]),$$

ahol $\text{cov}(X | \mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X | \mathcal{F}])(X - \mathbb{E}[X | \mathcal{F}])^T | \mathcal{F}]$ a feltételes kovarianciamátrixot jelöli.

- (3) Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ egy f sűrűségfüggvényű és F eloszlásfüggvényű abszolút folytonos eloszlásból vett minta (független és azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata), és jelölje az eredeti mintából képzett rendezett mintát: $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.

Határozzuk meg a rendezett minta (együttes) sűrűségfüggvényét.

- (4) Határozzuk meg az $X_{(k)}$ változó (perem) eloszlás- és sűrűségfüggvényét. Nézzük meg azt az esetet, amikor X_1 egyenletes a $[0, 1]$ -en.

- (5) Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ exponenciális eloszlásból vett minta, $S_i = X_1 + \dots + X_i$, továbbá $Y_i = S_i/S_n$, $1 \leq i \leq n-1$. Határozzuk meg $Y_1, \dots, Y_{n-1}, S_n$ együttes sűrűségfüggvényét! Mutassuk meg, hogy $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ eloszlása olyan, mint a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett $n-1$ elemű rendezett mintáé.

- (6) Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta, határozzuk meg a rendezett minta várható értékét.

- (7) Mutassuk meg, hogy az $X_{(k)} = t$ feltétel mellett $X_{(1)}, \dots, X_{(k-1)}$ és $X_{(k+1)}, \dots, X_{(n)}$ független, az előbbi eloszlása olyan, mint egy $k-1$ elemű rendezett mintáé az $f_1(x) = \frac{f(x)}{F(t)} \mathbb{I}(x < t)$ sűrűségfüggvényű eloszlásból, míg az utóbbi eloszlása olyan, mint egy $n-k$ elemű rendezett mintáé az $f_2(x) = \frac{f(x)}{1-F(t)} \mathbb{I}(t < x)$ sűrűségfüggvényű eloszlásból.

- (8) Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta, határozzuk meg a rendezett minta kovarianciamátrixát is.