9. feladatsor

1. Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ független $N(0,1)$ eloszlású sorozat, továbbá $I(\lambda)$ a spektrál sűrűségfüggvény alábbi becslése

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum\nolimits_{k=1}^{T} X_k e^{-i\lambda k} \right|^2$$

   Számítsuk ki $I(\lambda)$ várható értékét és szórását! Igaz-e, hogy $T \to \infty$ esetén a szórás nullához tart?

2. Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ AR (1) folyamat, azaz $X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n$, ahol $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ fehér zaj σ szórással és $|\alpha| < 1$. Ekkor $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ a várható érték torzítatlan becslése.

   Számítsuk ki, milyen gyorsan tart $D^2\hat{\mu}_n$ nullához, azaz határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} nD^2\hat{\mu}_n$ limeszt.

   Mi történik akkor, ha α tart 1-hez?

3. Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ AR (1) folyamat, azaz $X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n$, ahol $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ fehér zaj σ szórással és $|\alpha| < 1$. Ekkor

$$\hat{R}_n(h) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-h}(X_k - \hat{\mu}_n)(X_{k+h} - \hat{\mu}_n), \quad \hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

   a kovariancia torzított becslése.

   Számítsuk ki, milyen gyorsan tart a torzítás nullához, azaz határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} nE(\hat{R}_n(h) - R(h))$ limeszt, ahol R az X folyamat kovarianciafüggvénye.

   Mi történik akkor, ha α tart 1-hez?

4. Legyen $X_0 = 0$, $X_{t+1} = \alpha X_t + \varepsilon_{t+1}$ egy AR(1) folyamat, ahol ε_t egy $N(0,1)$ fehér zaj. Számítsuk ki α maximum-likelihood becslését a $X_1, \ldots, X_t$ mintából!

Problem sheet 9

1. Let $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ be an i.i.d. $N(0,1)$ sequence. Consider the following estimate of the spectral density:

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{k=1}^{T} X_k e^{-i\lambda k}\right|^2$$

   Calculate $EI(\lambda)$ and $D^2(I(\lambda))$. Is it true that the variance tends to 0 as T tends to infinity?

2. Let $X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n$, be an AR(1) sequence with $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ white noise with variance σ^2. Let $|\alpha| < 1$. Then $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ is an unbiased estimate of the expectation (which is 0).

   Calculate how fast $D^2\hat{\mu}_n$ tends to zero, that is, determine $\lim_{n\to\infty} nD^2\hat{\mu}_n$.

   What happens when α tends to 1?

3. Let X_n be as in the previous exercise.

$$\hat{R}_n(h) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-h}(X_k - \hat{\mu}_n)(X_{k+h} - \hat{\mu}_n), \quad \hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

   is a biased estimate of the covariance. Calculate how fast the bias tends to 0, that is, determine $\lim_{n\to\infty} nE(\hat{R}_n(h) - R(h))$. What happens if α tends to 0?

4. Let $X_0 = 0$, $X_{t+1} = \alpha X_t + \varepsilon_{t+1}$ be an AR(1) process with ε_t a $N(0,1)$ i.i.d. sequence. Calculate the maximum likelihood estimate of α from the sample $X_1, \ldots, X_t$.