8. feladatsor

1. Legyen ϕ_X kétszer folytonosan differenciálható és $\phi_X(0) = 0$. Lássuk be, hogy ekkor

$$D^2 \left(X_1 + \ldots + X_n \right) \to \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(u)}{\sin^2(u/2)} \, du, \; n \to \infty.$$

   (Eddig csak azt tudtuk, hogy korlátos a sorozat. Mi a helyzet $u = 0$ esetén?)

2. Most egy eléggé általános tételt említünk meg, ami nem csak ARMA-ra alkalmazható és lehetőséget ad a Wald-felbontás együtthatóinak megtalálására. (A ξ_i-k is kiszámolhatóak lennének, de most ezzel nem fogalalkozunk.)

   Dirichlet-Bernstein tétele. Legyen f Lipschitz-folytonos, 2π szerint periodikus függvény. Akkor a $h_j, j \in \mathbb{Z}$ Fourier együtthatókra igaz, hogy $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |h_j| < \infty$ és a

$$\sum_j h_j e^{-iju}$$

   Fourier-sor egyenletesen (abszolút) konvergens f-hez. (Pl. ha f folytonosan differenciálható, akkor igaz a tétel.) $\square$

   Legyen X_t nulla várható értékű, teljesen reguláris stacionárius folyamat. Ekkor (egyértelműen) előáll a ξ_k innovációkból végtelen kauzális mozgó átlagként, azaz

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_{t-j}, \tag{1}$$

   ahol $E\xi_k^2 = 1$, $\xi_k \in H_X(k)$ pedig merőleges a $H_X(k-1)$ altérre, ami $(X_{k-1}, X_{k-2}, \ldots)$ lineáris burkának lezárása.

   Célunk az a_j együtthatók meghatározása, valamint a ξ_k reprezentációja. Ezt csak speciális pluszfeltételek mellett tudjuk véghezvinni.

   Tétel. Ha ϕ_X szigorúan pozitív és $\ln \phi_X$ Lipschitz-folytonos, akkor tekintsük $\ln \phi_X$ Fourier-sorának β_j együtthatóit. Legyen a_j az e^{-iju} együtthatója az alábbi sorfejtésben:

$$\sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\beta_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e^{-iju} \right)^k . \tag{2}$$

   Akkor

$$X_0 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_{-j},$$

   a Wold-felbontásban szereplő sorfejtés.

   Például $k = 1$ esetén a (2) képlet szerint

$$a_0^2 = 2\pi e^{\beta_0}$$

   az egy lépéses előrejelzés hibája. Itt pedig

$$\beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \phi_X(u) \, du,$$

   ami számolható. Hasonlóan, a kétlépéses előrejelzés hibája $a_0^2 + a_1^2$, s a többi.

3. Legyen $\phi_X(u) = e^{1+\cos(u)}$ illetve $\phi_X(u) = e^{1-\cos(2u)}$. Számoljuk ki az egy ill. kétlépéses előrejelzés hibáját, valamint az (1) sorfejtés első 2 tagját! Mi a helyzet $e^{\cos(u)}$ esetén?