7. feladatsor (javított változat)

1. Legyenek (X_n), (Y_n), $n \in \mathbb{Z}$ iid sorozatok, melyek egymástól is függetlenek, nulla várható értékűek és egységnyi szórásúak, továbbá

$$U_n = X_n - X_{n-1}, \qquad V_n = Y_n + Y_{n-1}, \qquad Z_n = U_n + V_n.$$

   Számítsuk ki $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ és $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ Wold felbontását.

2. Legyen $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ korrelálatlan, nulla várható értékű, egységnyi szórású sorozat és

$$Y_n = 3Y_{n-1} - X_n.$$

   rekurzió stacionárius megoldása.

   - Számítsuk ki az (Y_n) sorozat innovációját.
   - Számítsuk ki X_n vetületét a $H_Y(n)$ altérre.
   - Igaz-e, hogy $H_Y(n) = H_X(n)$?
   - Mi lesz az (Y_n) sorozat sorelőállítása az innovációból?

3. Legyen $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ fehér zaj,

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

   ahol a_i, $i \in \mathbb{Z}$ konstansok, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < \infty$. $G_a(z) := \sum_k a_k z^k$ az a_k sorozat által adott lineáris szűrő *transzferfüggvénye*. Szimbolikus írásmóddal: $X_n = G_a(z)\varepsilon_n$.

   Mutassuk meg, hogy X spektrális sűrűsége

$$f_X(\lambda) = |G_a(e^{i\lambda})|^2, \ \lambda \in [-\pi, \pi].$$

4. Legyen $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ korrelálatlan sorozat és tegyük fel, hogy

$$X_n = \frac{2}{3} Z_n - \frac{7}{3} Z_{n-1} + Z_{n-2}.$$

   Számítsuk ki X spektrális mértékét (spektrális sűrűségfüggvényét). Számítsuk ki X innovációját, azaz a $X_n - \hat{X}_n$-et. Igaz-e, hogy $H_X(n) = H_Z(n)$? Számítsuk ki X Wold felbontását.

5. Legyen $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ iid $N(0,1)$ sorozat és tegyük fel, hogy az Y_n stacionárius sorozat eleget tesz a következő rekurziónak

$$Y_n + \frac{7}{2} Y_{n-1} + \frac{3}{2} Y_{n-2} = Z_n.$$

   Számítsuk ki Y spektrális mértékét (spektrális sűrűségfüggvényét). Számítsuk ki Y innovációját, azaz a $Y_n - \hat{Y}_n$-et. Igaz-e, hogy $H_Y(n) = H_Z(n)$? Mi a Wold-felbontás?

6. Legyen $\omega := \pi/3$ rögzített és

$$X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + Z_t + 2.5 Z_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

   ahol $\{A, B, Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ korrelálatlan változók nulla várható értékkel és $D^2 A = D^2 B = s^2$, $D^2 Z_t = \sigma^2$. Mutassuk meg, hogy X reguláris. Határozzuk meg X Wold felbontását. X spektrális eloszlásának mely rész felel meg, a teljesen reguláris, illetve a szinguláris résznek?