

7. feladatsor

1. Legyenek $(X_n), (Y_n), n \in \mathbb{Z}$ iid sorozatok, melyek egymástól is függetlenek, nulla várható értékűek és egységnyi szórásúak, továbbá

$$U_n = X_n - X_{n-1}, \quad V_n = Y_n + Y_{n-1}, \quad Z_n = U_n + V_n.$$

Számítsuk ki $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ és $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ Wold felbontását.

2. Legyen $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ korrelálatlan, nulla várható értékű, egységnyi szórású sorozat és

$$Y_n = 3Y_{n-1} - X_n.$$

rekurzió stacionárius megoldása.

- Számítsuk ki az (Y_n) sorozat innovációját.
- Számítsuk ki X_n vetületét a $H_Y(n)$ altérre.
- Igaz-e, hogy $H_Y(n) = H_X(n)$?
- Mi lesz az (Y_n) sorozat sorelőállítás az innovációból?

3. Legyen $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ iid $N(0, 1)$ sorozat és tegyük fel, hogy az Y_n stacionárius sorozat eleget tesz a következő rekurciónak

$$Y_n = 2.5Y_{n-1} - Y_{n-2} + Z_n.$$

Számítsuk ki Y spektrális mértékét (spektrális sűrűségfüggvényét). Számítsuk ki Y innovációját, azaz a $Y_n - \hat{Y}_n$ -et. Igaz-e, hogy $H_Y(n) = H_Z(n)$? Igaz-e, hogy Y teljesen reguláris?

4. Legyen $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ korrelálatlan sorozat és tegyük fel, hogy

$$X_n = Z_n + 2.5Z_{n-1} + Z_{n-2}.$$

Számítsuk ki X spektrális mértékét (spektrális sűrűségfüggvényét). Számítsuk ki X innovációját, azaz a $X_n - \hat{X}_n$ -et. Igaz-e, hogy $H_X(n) = H_Z(n)$? Számítsuk ki X Wold felbontását.

5. Legyen $\omega := \pi/3$ rögzített és

$$X_t = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + Z_t + 2.5Z_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

ahol $\{A, B, Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ korrelálatlan változók nulla várható értékkel és $D^2 A = D^2 B = s^2, D^2 Z_t = \sigma^2$. Mutassuk meg, hogy X reguláris. Határozzuk meg X Wold felbontását. X spektrális eloszlásának mely rész felel meg, a teljesen reguláris, illetve a szinguláris résznek?

6. Legyen $(X_n), (Y_n)$ korrelálatlan stacionárius sorozatok. Spektrális sűrűségfüggvényeik

$$f_X = 1_{(-1,1)}, \quad f_Y = 1 - f_X$$

Mi a Wold felbontása az X, Y , ill. az $X + Y$ sorozatoknak?