6. feladatsor

1. Láttuk, hogy $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |R_X(k)| < \infty$-ből következik, hogy létezik (folytonos) spektrális sűrűségfüggvény. Azt is láttuk, hogy az utóbbi létezhet más esetekben is. Lássuk be, hogy ha létezik $\phi_X(u)$ akkor legalábbis $R_X(k) \to 0$, $k \to \infty$.

2. Legyen X_t stacionárius 0 várható értékkel. Lássuk be, hogy az L^2 nagy számok törvénye pontosan akkor igaz, ha

$$\frac{R_X(0) + R_X(1) + \ldots + R_X(n)}{n} \to 0, \tag{1}$$

   azaz ha $R_X(k)$ a 0-hoz tart $k \to \infty$ esetén *Césaro középben*.

3. Lássuk be, hogy ha $R_X(k) \to 0$, $k \to \infty$, akkor Q *minden* pontban folytonos, azaz $Q(\{\mu\}) = 0$ minden $\mu \in [-\pi, \pi]$-re.

4. Legyen $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stacionárius sorozat, R kovariancia függvénnyel. Tegyük fel, hogy $R(0) > 0$ és $R(n) \to 0$ ha $n \to \infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor tetszőleges $n \geq 0$ esetén a $\Gamma_n = (R(i-j))_{0\leq i,j\leq n}$ mátrix nem szinguláris.

   (Útmutatás. Gondoljuk meg, hogy ha valamilyen n-re Γ_n szinguláris, akkor $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ az $L^2(\Omega, P)$ véges dimenziós alterét feszíti ki, és így $R(n) \to 0$ maga után vonná $D^2(X_n) \to 0$-t is.)

5. Lássuk be, hogy ha Q az X_t stacionárius folyamat spektrális mértéke, akkor

$$D^2\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(nu/2)}{\sin^2(u/2)}\, Q(du).$$

   (Mi a helyzet $u = 0$ esetén?)

6. Lássuk be, hogy ha ϕ_X létezik és folytonos (pl. ha $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |R_X(k)| < \infty$), akkor

$$D^2\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}\right) \to \phi_X(0).$$

7. Mutassunk példát olyan stacionárius folyamatra, hogy a

$$D^2\left(X_1 + \ldots + X_n\right),\ n \geq 1$$

   sorozat korlátos!

8. Legyen ϕ_X kétszer folytonosan differenciálható és $\phi_X(0) = 0$. Lássuk be, hogy akkor a

$$D^2\left(X_1 + \ldots + X_n\right),\ n \geq 1$$

   sorozat korlátos!