

6. feladatsor

1. Láttuk, hogy $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |R_X(k)| < \infty$ -ből következik, hogy létezik (folytonos) spektrális sűrűségfüggvény. Azt is láttuk, hogy az utóbbi létezhet más esetekben is. Lássuk be, hogy ha létezik $\phi_X(u)$ akkor legalábbis $R_X(k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.
2. Legyen X_t stacionárius 0 várható értékkel. Lássuk be, hogy az L^2 nagy számok törvénye pontosan akkor igaz, ha

$$\frac{R_X(0) + R_X(1) + \dots + R_X(n)}{n} \rightarrow 0, \quad (1)$$

azaz ha $R_X(k)$ a 0-hoz tart $k \rightarrow \infty$ esetén *Césaro középben*. Ebből következik, hogy ha a Q spektrális mérték folytonos a 0-ban, akkor (1) fennáll.

3. Lássuk be, hogy ha $R_X(k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, akkor Q minden pontban folytonos, azaz $Q(\{\mu\}) = 0$ minden $\mu \in [-\pi, \pi]$ -re.
4. Legyen $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stacionárius sorozat, R kovariancia függvény. Tegyük fel, hogy $R(0) > 0$ és $R(n) \rightarrow 0$ ha $n \rightarrow \infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor tetszőleges $n \geq 0$ esetén a $\Gamma_n = (R(i-j))_{0 \leq i, j \leq n}$ mátrix nem szinguláris.
(Útmutatás. Gondoljuk meg, hogy ha valamilyen n -re Γ_n szinguláris, akkor $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ az $L^2(\Omega, P)$ véges dimenziós alterét feszíti ki, és így $R(n) \rightarrow 0$ maga után vonná $D^2(X_n) \rightarrow 0$ -t is.)

5. Legyen X_t stacionárius 0 várható értékkel. Teljesüljön $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |R_X(k)| < \infty$. Adjunk formulát $\phi_X(0)$ -ra! Ha $\phi_X(0) > 0$, akkor lássuk be, hogy

$$D^2 \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow \phi_X(0).$$

6. Lássuk be, hogy ha Q az X_t stacionárius folyamat spektrális mértéke, akkor

$$D^2 \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(nu/2)}{\sin^2(u/2)} Q(du).$$

(Mi a helyzet $u = 0$ esetén?)

7. Lássuk be, hogy ha ϕ_X létezik és folytonos, akkor

$$D^2 \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow \phi_X(0).$$

8. Mutassunk példát olyan stacionárius folyamatra, hogy a

$$D^2(X_1 + \dots + X_n), \quad n \geq 1$$

sorozat korlátos!

9. Legyen ϕ_X kétszer folytonosan differenciálható és $\phi_X(0) = 0$. Lássuk be, hogy akkor a

$$D^2(X_1 + \dots + X_n), \quad n \geq 1$$

sorozat korlátos!

10. Legyenek $(X_n), (Y_n), n \in \mathbb{Z}$ iid sorozatok, melyek egymástól is függetlenek, nulla várható értékűek és egységnyi szórásúak, továbbá

$$U_n = X_n - X_{n-1}, \quad V_n = Y_n + Y_{n-1}, \quad Z_n = U_n + V_n.$$

Számítsuk ki $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ és $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ Wold felbontását.