5. feladatsor

1. Legyen $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stacionárius sorozat, $R(k) = \rho + (1-\rho)1_{\{k=0\}}$ autokovariancia sorozattal, ahol $0 < \rho < 1$. Mekkora az egy lépéses előrejelzés hibájának szórásnégyzete?

2. Tekintsük az $A(z)X_t = \varepsilon_t$ ARMA folyamatot, ahol $A(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2$-nek kettős gyöke van, az egységkörön kívül. (Éppenséggel valósnak kell lennie.) Adjuk meg X_t (kauzális) végtelen mozgóátlag előállítását.

3. A szűrési feladattal foglalkozunk: legyenek S_t, N_t független stac. folyamatok, $ES_t = EN_t = 0$.

   S_t a jel, N_t a zaj; célunk kiszűrni lineáris szűrővel az $X_t = S_t + N_t$ zajos jelből S_t-t a legkisebb négyzetes értelemben optimális módon. Azt a $\psi_k, k \in \mathbb{Z}$ szűrőt nevezzük Wiener-szűrőnek, melyre

   $$E[S_t - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_j X_{t-k}]^2$$

   a lehető legkisebb (persze minden t-re ugyanaz a ψ_j sorozat működik, mivel a folyamatok stacionáriusak).

   Legyen $G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k e^{-itk}$ a szűrőegyütthatókkal képzett trigonometrikus sor összege. (Egyébként $G(t) = H(e^{-it})$ ahol $H(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j z^j$ a szűrő *transzferfüggvénye*.)

   Állítás. $R_X(k) = R_S(k) + R_N(k)$, $k \in \mathbb{Z}$; ugyanígy $\phi_X(t) = \phi_S(t) + \phi_N(t)$.

   Tétel. A Wiener-szűrőre igaz, hogy

   $$G(t) = \frac{\phi_S(t)}{\phi_S(t) + \phi_N(t)},\ t \in [-\pi, \pi].$$

   Következésképp

   $$\psi_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\phi_S(t)}{\phi_S(t) + \phi_N(t)} e^{itk} dt.$$

4. Legyen N_t fehér zaj, $R_N(0) = 1$. Legyen S_t spektrális sűrűségfüggvénye $\phi_S(u) = e^{|u|} - 1$, $u \in [-\pi, \pi]$ Számítsuk ki a Wiener-szűrő együtthatóit!

5. Tegyük meg ezt akkor is ha $S_t = \beta S_{t-1} + \varepsilon_t$ AR(1) folyamat, ahol $\beta \in (-1, 1)$ és ε_t fehér zaj.

6. Mi a helyzet, ha $S_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$?