4. feladatsor

1. Adjuk meg az alábbi ARMA folyamat kauzális végtelen mozgó átlag előállítását.
$$X_t - \frac{3}{10}X_{t-1} - \frac{1}{10}X_{t-2} = \varepsilon_t.$$
2. Egy ARMA folyamat *invertálható*, ha a $B(z)$ polinom minden gyöke a komplex egységkörlapon kívül van. Ebben az esetben gondoljuk végig, hogy a ε_t zajfolyamat előáll az X_t folyamatból kauzális lineáris szűrővel!
3. Legyen az X_t, $t \in \mathbb{Z}$ folyamat spektrális sűrűségfüggvénye $\phi_X(u) = e^{|u|}$, $u \in [-\pi, \pi]$. Számítsuk ki az $R_X(k)$ kovarianciafüggvényt! (Tanács: az integrálást komplex számokkal célszerű végezni, de utána "komplexteleníteni" kell, hiszen valós számot kell kapnunk. Ebben segít az, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén $z + \overline{z}$ valós.)
4. Ugyanaz a feladat, de most $\phi_X(u) = |u|$. (Parciális integrálás.) Nézzük meg a $\phi_X(u) = 1_{u\in[-c,c]}$ indikátorfüggvény esetét is $0 \le c \le \pi$-re! (A $c = \pi$ eset a fehér zaj, ami nagyon egyszerű.)
5. Feltesszük, hogy ξ_t egy (p, q)-rendű invertálható és stabil ARMA folyamat, $A(z)\xi_t = B(z)\epsilon_t$.

   ξ_{t+1} legjobb lineáris becslése az $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \ldots$ múltból éppen
$$\hat{\xi}_{t+1} = \left[\frac{B(z)}{A(z)} - \beta_0\right]\epsilon_{t+1}.$$
   Mivel ξ_t invertálható, ezért az $\epsilon_t, \ldots$ múltból vett lineáris becslések ugyanazok, mint az $\xi_t, \xi_{t-1}, \ldots$ múltból vett lineáris becslések.

   Mi több,
$$\hat{\xi}_{t+1} = \left[\frac{B(z)}{A(z)} - \beta_0\right]\frac{A(z)}{B(z)}\xi_{t+1},$$
   tehát $\hat{\xi}_t$-re is rekurzió teljesül, hiszen
$$B(z)\hat{\xi}_t = (B(z) - \beta_0 A(z))\xi_t,$$
   ezt kiírva olyan rekurziót kapunk a $\hat{\xi}_t$ becslésre, amely $\hat{\xi}_t$ értékét $\hat{\xi}_s, s < t$-ből valamint $\xi_s, s < t$-ből számolja (ennek az az oka, hogy $B(z) - \beta_0 A(z)$-ban 0 a konstans együtthatója). A $\hat{\xi}_t$ sorelőállítása ξ_t múltjából pedig
$$\hat{\xi}_{t+1} = \left[\frac{B(z)}{A(z)} - \beta_0\right]\frac{A(z)}{B(z)}\xi_{t+1} = \left[1 - \beta_0\frac{A(z)}{B(z)}\right]\xi_t.$$
6. Határozzuk meg $\hat{X}_{t+1}$-et a stabil AR(1) folyamat esetében, azaz akkor, ha
$$X_{t+1} = \alpha X_t + \varepsilon_{t+1}$$
   valamely $\alpha \in (-1, 1)$-el és ε_t fehér zajjal!
7. Tekintsük a
$$X_t - (1/2)X_{t-1} = \varepsilon_t + (1/3)\varepsilon_{t-1},\ t \in \mathbb{Z}.$$
   ARMA(1,1) folyamatot! Határozzuk meg $\hat{X}_{t+1}$-et az $(X_t, X_{t-1}, \ldots)$ generálta múltból! Adjunk rekurziót is $\hat{X}_{t+1}$-re!
8. Az alábbi folyamatnál írjuk fel $\hat{X}_{t+1}$-et az $(X_t, X_{t-1}, \ldots)$ generálta múltból. Adjunk rekurziót is $\hat{X}_{t+1}$-re!
$$X_t - \frac{3}{10}X_{t-1} - \frac{1}{10}X_{t-2} = \varepsilon_t - \frac{1}{5}\varepsilon_{t-1}.$$