3. gyakorlat

Szimbolikus kalkulus: bármely X_t folyamat esetén $zX_t = X_{t-1}$, illetve $z^k X_t = X_{t-k}$, $k \in \mathbb{N}$-re. A gyakorlati feladataink olyanok, hogy feltevéseik mellett a szimbolikus műveletek precízen igazolhatók (felhasználva a lineáris szűrőkről tanultakat).

1. Írjuk fel az $X_{t+1} = \alpha X_t + \varepsilon_{t+1}$ autoregresszív folyamat végtelen mozgóátlag előállítását az $\alpha = 7$ esetben (mely nem kauzális)! Számoljuk ki a spektrális sűrűségfüggvényt az $\alpha = 7$ és $\alpha = 1/7$ esetekben.

2. Legyen $(Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ stacionárius sorozat, amelyre $\sum_k |R_Y(k)| < \infty$ és

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Y_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

   ahol a_i, $i \in \mathbb{Z}$ konstansok, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < \infty$. $G_a(z) := \sum_k a_k z^k$ az a_k sorozat által adott lineáris szűrő *transzferfüggvénye*. Szimbolikus írásmóddal: $X_n = G_a(z)Y_n$.

   Mutassuk meg, hogy X spektrális sűrűsége

$$f_X(\lambda) = f_Y(\lambda)|G_a(e^{i\lambda})|^2, \ \lambda \in [-\pi, \pi],$$

   ahol f_Y az Y spektrális sűrűsége. Számítsuk ki a spektrális sűrűségfüggvényt az exponenciális simítás esetére, amikor $a_k = \mu^k(1-\mu)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \mu < 1$.

3. Legyen Y_t p-adrendű autoregresszív folyamat (azaz $AR(p)$ folyamat), vagyis tegyen eleget a

$$Y_t + \alpha_1 Y_{t-1} + \ldots + \alpha_p Y_{t-p} = \varepsilon_t$$

   rekurziónak, ahol ε_t fehér zaj (azaz $R_\varepsilon(k) = 0$ ha $k \neq 0$). Tekintsük a $1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_p z^p = 0$ egyenletet. Tény: ha ennek minden gyöke a komplex egységkörlapon kívül van, akkor Y előáll ε-ból kauzális végtelen mozgó átlagként.

   Lássuk be ezt a $p = 2$ esetben (megadva az előállítást), illetve gondoljuk végig általános p-re is abban az esetben, amikor az egyenletnek nincsenek többszörös gyökei!

4. Legyen Y_t (p,q)-rendű autoregresszív mozgóátlag folyamat (azaz $ARMA(p,q)$ folyamat), vagyis tegyen eleget a

$$Y_t + \alpha_1 Y_{t-1} + \ldots + \alpha_p Y_{t-p} = \beta_0 \varepsilon_t + \ldots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

   rekurziónak, ahol ε_t fehér zaj egység szórással (azaz $R_\varepsilon(0) = 1$). Célszerű bevezetni az $A(z) = 1 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_p z^p$ és $B(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_q z^q$ polinomokat.

   Gondoljuk végig, hogy ha az $A(z)$ gyökei a komplex egységkörlapon kívül vannak, akkor létezik kauzális végtelen mozgóátlag előállítás! Az ilyen folyamatot *stabil* ARMA folyamatnak nevezzük.

5. Egy ARMA folyamat *invertálható*, ha a $B(z)$ polinom minden gyöke a komplex egységkörlapon kívül van. Ebben az esetben gondoljuk végig, hogy a ε_t zajfolyamat előáll az X_t folyamatból kauzális lineáris szűrővel!

6. Tekintsük az alábbi $ARMA(1,1)$ folyamatot:

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \ t \in \mathbb{Z}.$$

   Tfh. $|\phi| < 1$. Ekkor létezik X_t-nek kauzális végtelen mozgó átlag előállítása ε_t-ből. Adjuk meg ezt az előállítást ! Ha $|\theta| < 1$, akkor a folyamat invertálható is; írjuk fel ε_t előállítását X_t-ből.

7. Adjuk meg az alábbi ARMA folyamat kauzális végtelen mozgó átlag előállítását.

$$X_t - \frac{3}{10} X_{t-1} - \frac{1}{10} X_{t-2} = \varepsilon_t - \frac{1}{5} \varepsilon_{t-1}.$$