2. gyakorlat

1. Legyen U egyenletes eloszlású $[-\pi, \pi]$-n és V tőle független Q eloszlású ($Q([-\pi, \pi)) = 1$) változó. Mutassuk meg, hogy $X_n = \exp(i(U - nV))/\sqrt{2\pi}$ komplex értékű stacionárius sorozatot definiál, melynek spektrális eloszlása Q, azaz
$$\operatorname{cov}(X_n, X_{n+k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku} Q(du),$$
minden $k \in \mathbb{Z}$-re.

2. Legyenek U, U' egyenletes eloszlásúak $(-\pi, \pi)$-n és V egy Q eloszlású, $(-\pi, \pi)$-értékű valószínűségi változó. Legyen a Q mérték szimmetrikus, azaz $Q(H) = Q(-H)$ minden mérhető halmazra. Mutassuk meg, hogy ha U, U', V függetlenek akkor $X_n = (\cos(U - nV) + \sin(U' - nV))/\sqrt{2\pi}$ (valós értékű) stacionárius sorozatot definiál, melynek spektrális mértéke éppen Q. (Útmutatás: használjuk az előző feladatot.)

3. Határozzuk meg a következő autokovariancia függvényekhez tartozó spektrális mértéket illetve, ha van, spektrális sűrűségfüggvényt.
   (a) $f(h) = (-1)^h$

   (b) $f(h) = 1 + \cos\frac{h\pi}{2} + \cos\frac{h\pi}{4}$ (c) $f(h) = \begin{cases} 1 & \text{ha } h = 0, \\ .4 & \text{ha } h = \pm 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

4. Lássuk be, hogy az alábbi egészeken értelmezett függvények nem lehetnek autokovarianciafüggvények. Tegyük ezt olyan módon, hogy találjunk olyan F előjeles mértéket mellyel $f(h) = 1/(2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} e^{ihu} F(du)$ alakban előáll, majd vegyük észre, hogy F nem mérték (azaz nemcsak pozitív értékeket vesz fel), tehát f nem lehet kovarianciafüggvény.
   (a) $f(h) = 1 + \cos\frac{h\pi}{2} - \cos\frac{h\pi}{4}$

   (b) $f(h) = \begin{cases} 1 & \text{ha } h = 0, \\ .6 & \text{ha } h = \pm 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

5. $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ valós stacionárius sorozat, melynek várható értéke nulla, kovariancia függvénye $(R_X(n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Mutassuk meg, hogy ha $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X_k$ sor egy valószínűséggel és L_2-ben konvergens!

   $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < \infty$ esetén legyen
$$Y_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X_{n-k}. \tag{1}$$
   Fejezzük ki Y kovariancia függvényét R_X-ből, és mutassuk meg, hogy ha $\sum |R_X(m)| < \infty$, akkor $\sum |R_Y(m)| < \infty$ is.

   Az (1) operációról azt mondjuk, hogy *az a_n sorozat által adott lineáris szűrőt alkalmaztuk az X_n sorozatra*. Ha $a_k = 0$ minden $k \le -1$-re akkor a lineáris szűrő *kauzális* (ritkábban: *fizikailag megvalósítható*).

   Ha X_n fehér zaj, akkor elég $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^2 < \infty$-et feltenni, és Y_n jól definiált lesz L_2-ben (és egy valószínűséggel is). Ekkor Y_n-t végtelen mozgó átlag folyamatnak hívjuk. Ha véges sok k kivételével $a_k = 0$, akkor "sima" mozgó átlag folyamatról van szó.

6. Autoregresszív folyamatnak nevezzük X_t-t, ha valamely $\alpha \in \mathbb{R}$-re
$$X_{t+1} = \alpha X_t + \varepsilon_t$$
   valamely ε_t fehér zajra, $t \in \mathbb{Z}$. Lássuk be, hogy $\alpha \neq \pm 1$ esetén létezik ilyen stacionárius folyamat, és a ε_t-ből megkapható lineáris szűrővel, mely $\alpha \in (-1, 1)$ esetén még kauzális is.

   Mi lesz X_t kovarianciafüggvénye és spektrális sűrűségfüggvénye?

7. Legyenek $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ és $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ független gyengén stacionárius folyamatok azonos kovariancia függénnyel és $Z_{2k} = X_k$, $Z_{2k+1} = Y_k$. Legyen ϕ a (közös) spektrális sűrűségfüggvény, egyszerűség kedvéért teljesüljön $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |R_X(k)| < \infty$ is. Mutassuk meg, hogy Z stacionárius. Hogyan kapható meg a kovariancia függvénye X és Y közös kovariancia függvényéből? Hogyan fejezhető ki Z spektrális sűrűsége ϕ-ből?

8. Legyen $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stacionárius sorozat, $R(k) = \rho + (1-\rho)1_{\{k=0\}}$ autokovariancia sorozattal, ahol $0 < \rho < 1$. Konstruáljunk ilyen folyamatot! Számítsuk ki X spektrális eloszlását!

2. gyakorlat

1. Let U be uniformly distributed on $[-\pi, \pi]$ and let V be independent from U with distribution Q ($Q([-\pi, \pi)) = 1$). Show that $X_n = \exp(i(U - nV))/\sqrt{2\pi}$ (which is a complex-valued process) is stationary and its spectral measure is Q, that is
$$\operatorname{cov}(X_n, X_{n+k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iku} Q(du),$$
for all $k \in \mathbb{Z}$.

2. Let U, U' be uniformly distributed on $(-\pi, \pi)$ and let V have distribution Q with values in $(-\pi, \pi)$. Let Q be symmetric, that is $Q(H) = Q(-H)$ for all measurable sets H. Show that, assuming U, U', V ae independent, $X_n = (\cos(U - nV) + \sin(U' - nV))/\sqrt{2\pi}$ is a (real-valued) stationary process with spectral measure Q. (Hint: write $\sin(u), \cos(u)$ using e^{iu}.)

3. Determine the spectral measure for the following autocovariance functions ($h \in \mathbb{Z}$):
   (a) $f(h) = (-1)^h$

   (b) $f(h) = 1 + \cos\frac{h\pi}{2} + \cos\frac{h\pi}{4}$ (c) $f(h) = \begin{cases} 1 & \text{ha } h = 0, \\ .4 & \text{ha } h = \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

4. Show that the following functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ cannot be autocovariance functions.
   (a) $f(h) = 1 + \cos\frac{h\pi}{2} - \cos\frac{h\pi}{4}$

   (b) $f(h) = \begin{cases} 1 & \text{ha } h = 0, \\ .6 & \text{ha } h = \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

5. Let $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ be stationary with zero mean and covariance function $(R_X(n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Assume $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$. Show that $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X_k$ converges in L^2 and almost surely. Let
$$Y_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X_{n-k}. \tag{2}$$
Express R_Y from R_X and show that $\sum |R_X(m)| < \infty$ implies $\sum |R_Y(m)| < \infty$, too.

   Operation (2) is called *the linear filter determined by sequence a_n is applied to X_n*. If $a_k = 0$ for all $k \leq -1$ then the filter is *causal* or *physically realisable.*

   If X_n is white noise (that is, a zero-mean i.i.d. sequence with unit variance) then it is enough to assume $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^2 < \infty$ for Y_n to be well-defined. In this case Y_n is called an infinite moving average process.

6. A process X_t is called autoregressive if for some $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$X_{t+1} = \alpha X_t + \varepsilon_t$$
where ε_t is white noise. Show that for $\alpha \neq \pm 1$ there is such a stationary process that can be represented by a linear filter applied to ε_t. If $\alpha \in (-1, 1)$ then this filter is causal. What are the covariance function and spectral density of X_t?

7. Let $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ and $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ be independent stationary processes with the same covariance function. Let $Z_{2k} = X_k$, $Z_{2k+1} = Y_k$. Denote by ϕ their spectral density. For simplicity, assume also $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |R_X(k)| < \infty$. Show that Z is stationary and calculate its covariance function and spectral density.

8. Let $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be stationary with covariance function $R(k) = \rho + (1-\rho)1_{\{k=0\}}$, where $0 < \rho < 1$. Construct such a process and calculate its spectral measure.