## 1. gyakorlat

1. $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ független standard normálisok sorozata és $a, b, c$ konstansok. A következő folyamatok közül melyek stacionáriusak? A stacionárius folyamatokra határozzuk meg a várható érték és kovariancia függvényüket.

   (a) $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-1}$, (b) $X_t = a + bZ_0$,
   (c) $X_t = Z_1\cos(ct) + Z_2\sin(ct)$, (d) $X_t = Z_0\cos(ct)$,
   (e) $X_t = Z_t\cos(ct) + Z_{t-1}\sin(ct)$, (f) $X_t = Z_tZ_{t-1}$.

2. Az alábbi egészeken értelmezett függvények közül melyek stacionárius idősorok autokovariancia függvényei:

   (a) $f(h) = (-1)^h$

   (b) $f(h) = 1 + \cos\frac{h\pi}{2} + \cos\frac{h\pi}{4}$ (c) $f(h) = 1 + \cos\frac{h\pi}{2} - \cos\frac{h\pi}{4}$

   (d) $f(h) = \begin{cases} 1 & \text{ha } h = 0, \\ .4 & \text{ha } h = \pm 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ (e) $f(h) = \begin{cases} 1 & \text{ha } h = 0, \\ .6 & \text{ha } h = \pm 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

3. Legyen $U$ egyenletes eloszlású $[0, 1]$-n. Írjuk fel $U$-t kettes számrendszerben $U = \sum_{k>0} 2^{-k}X_k$. Mutassuk meg, hogy a $V_n = \sum_{k>0} X_{n+k}2^{-k}$, $n \geq 0$ sorozat erősen stacionárius és számítsuk ki a kovariancia függvényét.

4. Legyen $\phi$ karakterisztikus függvény. Mutassuk meg, hogy

   $$|\phi(t) - \phi(s)| \leq \sqrt{2|1 - \phi(t-s)|}$$

   Mutassuk meg, hogy ez akkor is igaz, ha $\phi$ pozitív szemidefinit és $\phi(0) = 1$. (Útmutatás: Írjuk fel $\phi$-ből képzett, $0, t, s$ értékekhez tartozó $3 \times 3$-as pozitív szemidefinit mátrixot. Vonjuk le az utolsó sort és oszlopot a másodikból. Gondoljuk meg, hogy az így kapott $2 \times 2$-es mátrix is pozitív szemidefinit és számítsuk ki a determinánsát.)

5. Tegyük fel, hogy az $X$ stacionárius folyamat kovarianciafüggvénye olyan, hogy $f(z) = 1_{\{z\in[-\pi/2,\pi/2]\}}$ választással előáll

   $$R_X(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{izn}\,dz$$

   alakban. Teljesül-e az, hogy $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |R_X(k)| < \infty$?

6. Legyen $c : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $c(s,t) = \min(s,t)$. Mutassuk meg, hogy $c$ pozitív definit, azaz

   $$\sum_{j,k} c(t_k, t_j)z_j\bar{z}_k \geq 0$$

   minden $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ és $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ esetben, és csak akkor nulla, ha mindegyik $z_k$ az.

7. Legyen $X$ stacionárius Gauss folyamat, nulla várható értékkel és $R_X(t)$ kovariancia függvénnyel. Számítsuk ki $X^2$ és $X^3$ kovariancia függvényét.

8. Legyen $U$ egyenletes eloszlású $[-\pi, \pi]$-n és $V$ tőle független $Q$ eloszlású ($Q([-\pi,\pi)) = 1$) változó. Mutassuk meg, hogy $X_n = \exp(i(U - nV))/(2\pi)$ komplex értékű stacionárius sorozatot definiál, melynek spektrális eloszlása $Q$, azaz

   $$\mathrm{cov}(X_n, X_{n+k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}Q(du),$$

   minden $k \in \mathbb{Z}$-re.

**Problem class 1**

1. Let $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be independent standard Gaussian. Let $a, b, c$ be real constants. Which of the following are stationary processes? Let us determine their expectation and covariance function.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-1}$, | (b) | $X_t = a + bZ_0$, |
| (c) | $X_t = Z_1\cos(ct) + Z_2\sin(ct)$, | (d) | $X_t = Z_0\cos(ct)$, |
| (e) | $X_t = Z_t\cos(ct) + Z_{t-1}\sin(ct)$, | (f) | $X_t = Z_tZ_{t-1}$. |

2. Which of the functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ below can appear as covariance function of a stationary process?

   (a) $f(h) = (-1)^h$

   (b) $f(h) = 1 + \cos\frac{h\pi}{2} + \cos\frac{h\pi}{4}$ (c) $f(h) = 1 + \cos\frac{h\pi}{2} - \cos\frac{h\pi}{4}$

   (d) $f(h) = \begin{cases} 1 & \text{ha } h = 0, \\ .4 & \text{ha } h = \pm 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ (e) $f(h) = \begin{cases} 1 & \text{ha } h = 0, \\ .6 & \text{ha } h = \pm 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

3. Let $U$ be uniform on $[0, 1]$ and let it be written as $U = \sum_{k>0} 2^{-k}X_k$, where $X_k \in \{0, 1\}$. Show that the process $V_n = \sum_{k>0} X_{n+k}2^{-k}$, $n \geq 0$ is strongly stationary. Calculate its covariance function. (Hint: show first that the $X_k$ are independent.)

4. Show that for a characteristic function $\phi$

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq \sqrt{2|1 - \phi(t-s)|}$$

   holds for all $s, t \in \mathbb{R}$. Show that this hold if we only assume that $\phi$ is positive semidefinite with $\phi(0) = 1$. (Hint: use the $3 \times 3$ matrix corresponding to $\phi$ and the values $0, t, s$. Subtract the last row and column from the second. The $2 \times 2$ matrix thus obtained remains positive semidefinite. Calculated its determinant.)

5. Assume that the covariance function of a stationary $X$ can be written as

$$R_X(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{izn}\,dz,$$

   where $f(z) = 1_{\{z\in[-\pi/2,\pi/2]\}}$. Is it possible that $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |R_X(k)| < \infty$?

6. Let $c : [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, $c(s, t) = \min(s, t)$. Show that $c$ is positive semidefinite. That is,

$$\sum_{j,k} c(t_k, t_j)z_j\bar{z}_k \geq 0$$

   for all $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ and $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$.

7. Let $X$ be stationary and Gaussian with zero mean. Its covariance function is denoted $R_X(t)$. Calculate the covariance functions of $X^2$ and $X^3$.

8. Let $U$ be uniform on $[-\pi, \pi]$ and let $V$ be independent from it with law $Q$ where $Q([-\pi, \pi)) = 1$. Show that $X_n = \exp(i(U - nV))/\sqrt{2\pi}$ is a complex-valued stationary process whose covariance can be represented as

$$\operatorname{cov}(X_n, X_{n+k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}Q(du),$$

   for all $k \in \mathbb{Z}$.