8. megoldások

1. Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ független $N(0,1)$ eloszlású sorozat, ekkor $EX_n^4 = 3$. Legyen továbbá $I(\lambda)$ a spektrál sűrűségfüggvény alábbi becslése
$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{k=1}^{T} X_k e^{-i\lambda k}\right|^2$$
Számítsuk ki $I(\lambda)$ várható értékét és szórását! Igaz-e, hogy $T\to\infty$ esetén a szórás nullához tart?

Megoldásvázlat: Legyen egyszerűség kedvéért X_k Gauss, ekkor $\kappa = 0$. Legyen $\sigma = 1$. Ahogyan az órán láttuk, valóban minden $\lambda \in [-\pi,\pi]$-re
$$EI(\lambda) = \frac{1}{2\pi},$$
vagyis a fehér zaj spektrális sűrűségfüggvényét torzítatlanul becsüli. Az órai számolást folytatni kell a következő módon. Ha 2λ nem a 2π többszöröse, akkor
$$\begin{aligned}
4\pi^2T^2EI^2(\lambda) &= \sum_{j,k,l,m=1}^{T} EX_jX_kX_lX_m e^{i\lambda(j+k-l-m)} \\
&= \sum_{k=1}^{T} EX_k^4 + \sum_{j=k,l=m,j\neq l} EX_j^2EX_l^2 e^{2i\lambda(j-l)} \\
&+ \sum_{j=l,k=m,j\neq k} EX_j^2EX_k^2 \\
&+ \sum_{j=m,l=k,j\neq m} EX_j^2EX_m^2 \\
&= 3T + 2(T-1)T + \sum_{j\neq l} e^{2i\lambda(j-l)} \\
&= T + 2T^2 + \left|\sum_{j=1}^{T} e^{2i\lambda j}\right|^2 - T \\
&= 2T^2 + \left|e^{2i\lambda}\frac{1-e^{2iT\lambda}}{1-e^{2i\lambda}}\right|^2 \\
&\le 2T^2 + 4\left|\frac{1}{1-e^{2i\lambda}}\right|^2.
\end{aligned}$$
Ezek szerint
$$D^2(I(\lambda)) := EI^2(\lambda) - (EI(\lambda))^2 \to \frac{1}{4\pi^2},\ T\to\infty.$$
Ha $\lambda = 0,\pi$, akkor sem tart 0-hoz. Tehát ez egy rossz becslési eljárás.

2. Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ AR (1) folyamat, azaz $X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n$, ahol $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ fehér zaj σ szórással és $|\alpha| < 1$. Ekkor $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ a várható érték torzítatlan becslése.
Számítsuk ki, milyen gyorsan tart $D^2\hat{\mu}_n$ nullához, azaz határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} nD^2\hat{\mu}_n$ limeszt.
Mi történik akkor, ha α tart 1-hez?

Megoldásvázlat: Megbeszéltük, az jött ki, hogy
$$nD^2(\hat{\mu}_n) \to C_\alpha := \left(\frac{2\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + \frac{1}{1-\alpha^2}\right).$$
Ez persze ∞-hez tart $\alpha\to 1$ esetén, vagyis romlik a becslés konvergenciasebessége.

3. Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ AR (1) folyamat, azaz $X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n$, ahol $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ fehér zaj σ szórással és $|\alpha| < 1$. Ekkor
$$\hat{R}_n(h) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-h}(X_k - \hat{\mu}_n)(X_{k+h} - \hat{\mu}_n), \quad \hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

a kovariancia torzított becslése.

Számítsuk ki, milyen gyorsan tart a torzítás nullához, azaz határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} nE(\hat{R}_n(h) - R(h))$ limeszt, ahol R az X folyamat kovarianciafüggvénye..

Mi történik akkor, ha α tart 1-hez?

Megoldásvázlat: Megbeszéltük valameddig. Az jött ki, hogy

$$E\sum_{k=1}^{n-h}(X_k - \hat{\mu}_n)(X_{k+h} - \hat{\mu}_n) = (n-h)R(h) + (n-h)E\hat{\mu}_n^2 - E\hat{\mu}_n(X_1 + \ldots + X_{n-h} + X_{h+1} + \ldots + X_n)$$

$$= \quad (n-h)R(h) + (n-h)E\hat{\mu}_n^2 - \frac{2}{n}E(X_{h+1} + \ldots + X_{n-h})^2 + E\hat{\mu}_n(X_1 + \ldots + X_h + X_{n-h+1} + \ldots + X_n).$$

Ezek szerint

$$nE(\hat{R}_n(h) - R(h)) = hR(h) + (n-h)E\hat{\mu}_n^2 - E\frac{2}{n}(X_{h+1} + \ldots + X_{n-h})^2 + E\hat{\mu}_n(X_1 + \ldots + X_h + X_{n-h+1} + \ldots + X_n).$$

Márpedig az előző feladat szerint $nE\hat{\mu}_n^2 \to C_\alpha$ és $\frac{2}{n}(X_{h+1} + \ldots + X_{n-h})^2 \to 2C_\alpha$, ha $n \to \infty$. Végül a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség miatt

$$E|\hat{\mu}_n(X_1 + \ldots + X_h + X_{n-h+1} + \ldots + X_n)| \leq \sqrt{E\hat{\mu}_n^2}\sqrt{E(X_1 + \ldots + X_h + X_{n-h+1} + \ldots + X_n)^2}.$$

Itt az első tényező 0-hoz tart, a második tényező egy konstanssal becsülhető, hiszen h egy fix szám. Adódik, hogy a keresett limesz $hR(h) - C_\alpha$.

4. Megbeszéltük.