A 6. feladatsor 5. feladatának nem beszéltük meg a megoldását. Röviden vázolom alább.

Feladat. Legyen ϕ_X kétszer folytonosan differenciálható és $\phi_X(0) = 0$. Lássuk be, hogy akkor a

$$D^2\left(X_1 + \ldots + X_n\right),\ n \geq 1$$

sorozat korlátos!

Megoldás: Mivel $\phi_X \geq 0$ és $\phi_X(0) = 0$, ezért 0 egy globális minimumhely, tehát $\phi'_X(0) = 0$. Vegyük észre, hogy ez a L'Hospital szabály kétszeri alkalmazása után azt jelenti, hogy $\phi_X(u)/u^2 \to \phi''_X(0)/2$, ha $u \to 0$. Mivel $\sin^2(u/2)/(u^2/4) \to 1$ ha $u \to 0$, adódik, hogy a $\phi_X(u)/\sin^2(u/2)$ véges határértékhez tart midőn $u \to 0$. Akkor viszont

$$D^2\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(nu/2)}{\sin^2(u/2)}\phi_X(u)\, du \leq C,$$

valamely C konstansra, hiszen $\sin^2(nu/2) \leq 1$ és az integrandus a fentiek miatt korlátos a 0 közelében (attól távolabb pedig triviálisan korlátos).