1. Legyen $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ korrelálatlan, nulla várható értékű, egységnyi szórású sorozat és

$$Y_n = 3Y_{n-1} - X_n.$$

rekurzió stacionárius megoldása.

- Számítsuk ki az (Y_n) sorozat innovációját.
- Számítsuk ki X_n vetületét a $H_Y(n)$ altérre.
- Igaz-e, hogy $H_Y(n) = H_X(n)$?
- Mi lesz az (Y_n) sorozat sorelőállítása az innovációból?

Megoldásvázlat: Már szerepelt, hogy ilyenkor az X_n jövőjéből állítható elő a folyamat, azaz $Y_n = \sum_{j=1}^{\infty}(1/3)^j X_{n+j}$. Ekkor $H_Y(n) \neq H_X(n)$, hiszen $H_Y(n) \supset \langle H_X(n), Y_n\rangle$.

Ennek a folyamatnak *ugyanaz* a kovarianciafüggvénye ill. spektruma, mint a jól ismert $Z_n = Z_{n-1}/3 + X_n/3$ stabil AR(1) folyamatnak, tehát teljesen reguláris és a sorelőállítás a_j együtthatói ugyanazok kell, hogy legyenek ($a_j = (1/3)^{j+1}$). Viszont a ξ_j-k különbözőek, hiszen ez két különböző folyamat, két különböző *realizáció*. Az X_n vetülete $H_Y(n)$-re persze saját maga, X_n, mert a többi generáló elemre ($Y_n, X_j, j < n$) merőleges. Tehát csak a ξ_n innovációkat kellene megkapni.

Y_n-et kell vetíteni Y_{n-1}-re (mert $X_j, j < n-1$-re úgyis merőleges). Tehát keressük azt az α-t, amire $Y_n - \alpha Y_{n-1}$ merőleges Y_{n-1}-re. Mivel $Y_{n-1} = Y_n/3 + X_n/3$,

$$\mathrm{cov}(Y_n - \alpha Y_n/3 - \alpha X_n/3, Y_n + X_n) = 0$$

kell, hogy fennálljon, vagyis

$$(1-\alpha/3)D^2Y_n - \alpha/3 = 0.$$

Vegyük észre, hogy $D^2(Y_n) = 1/8$, amiből $\alpha = 1/3$. Vagyis $Y_n - (1/9)(Y_n + X_n)$ merőleges Y_{n-1}-re, ennek szórásnégyzete $1/9$. Lenormálva, $\xi_n = (8/3)Y_n - (1/3)X_n$ adódik.

Ellenőrzésként kiszámoljuk a sorfejtés együtthatóit (bár már tudjuk, minek kellene lenniük): $j \geq 0$-ra

$$a_j = \mathrm{cov}(Y_0, (8/3)Y_{-j} - (1/3)X_{-j}) = (8/3)\mathrm{cov}(Y_0, Y_{-j}) = (8/3)(1/3)^j(1/8) = (1/3)^{j+1}.$$

Tehát

$$Y_n = \sum_{j=0}^{\infty}(1/3)^{j+1}[(8/3)Y_{n-j} - (1/3)X_{n-j}]$$

2. Legyen $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ iid $N(0,1)$ sorozat és tegyük fel, hogy az Y_n stacionárius sorozat eleget tesz a következő rekurziónak

$$Y_n = 2.5Y_{n-1} - Y_{n-2} + Z_n.$$

Számítsuk ki Y spektrális mértékét (spektrális sűrűségfüggvényét). Számítsuk ki Y innovációját, azaz a $Y_n - \hat{Y}_n$-et. Igaz-e, hogy $H_Y(n) = H_Z(n)$? Igaz-e, hogy Y teljesen reguláris?

Megoldásvázlat: Az órán kiszámoltuk, hogy

$$Y_n = \frac{1}{(z-2)(z-1/2)}Z_n = [\frac{2/3}{z-2} - \frac{2/3}{z-1/2}]X_n = (-1/3)\sum_{j\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^j X_{n-j} - (1/3)\sum_{j\geq 1}2\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} X_{n+j},$$

azaz nem-kauzális a mozgóátlag-előállítás a X_j-ből. Itt rontottuk el a számolást az órán!

Általános tétel: ARMA folyamatnál, ha A, B polinomokra

$$A(z)X_t = B(z)\varepsilon_t,$$

ahol ε_t fehér zaj. Ekkor

$$\phi_X(u) = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{A(e^{iu})}{B(e^{iu})}\right|^2.$$

Mostantól, egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy

$$Y_n = \sum_{j\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^j X_{n-j} + \sum_{j\geq 1} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} X_{n+j}.$$

Innen tudjuk, hogy

$$\phi_Y(u) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|1-2.5e^{iu}+e^{2iu}|^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{8.25-10\cos(u)+2\cos(2u)},$$

ami mutatja, hogy teljesen reguláris a folyamat (mert alulról korlátozható egy pozitív számmal). Persze $H_Y(n)$ nagyobb, mint $H_X(n)$, mégpedig

$$H_Y(n) = \left\langle X_j, j\leq n, \sum_{j\geq 1} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} X_{n+j} \right\rangle.$$

Már csak az innovációt kell kiszámolni. Nyilván elég kiszámolni

$$W = \sum_{j\geq 1} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} X_j$$

vetületét a

$$W' := \sum_{j\geq 1} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} X_{j-1}$$

valváltozóra. Vegyük észre, hogy ez a vetület $2(W'-2X_0)$. Ez alapján

$$\hat{Y}_0$$

és

$$Y_0 - \hat{Y}_0$$

számolható lesz.