5. feladatsor megoldásvázlatok

2. Tekintsük a
$$X_t - (1/2)X_{t-1} = \varepsilon_t + (1/3)\varepsilon_{t-1},\ t \in \mathbb{Z}.$$
ARMA(1,1) folyamatot! Határozzuk meg $\hat{X}_{t+1}$-et az $(X_t, X_{t-1}, \ldots)$ generálta múltból! Adjunk rekurziót is $\hat{X}_{t+1}$-re!
Megoldásvázlat: Mivel $\beta_0 = 1$, tudjuk, hogy
$$\hat{X}_t = \left[1 - \beta_0 \frac{A(z)}{B(z)}\right] X_t = \frac{(5/6)z}{1 + (1/3)z} X_t,$$
vagyis
$$\hat{X}_t = \frac{5}{6} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^{j-1} X_{t-j}.$$
Rekurziót felírva:
$$B(z)\hat{X}_t = (B(z) - A(z))X_t,$$
azaz
$$\hat{X}_t + (1/3)\hat{X}_{t-1} = \frac{5}{6} X_{t-1}.$$

3. Az alábbi folyamatnál írjuk fel $\hat{X}_{t+1}$-et az $(X_t, X_{t-1}, \ldots)$ generálta múltból. Adjunk rekurziót is $\hat{X}_{t+1}$-re!
$$X_t - \frac{3}{10}X_{t-1} - \frac{1}{10}X_{t-2} = \varepsilon_t - \frac{1}{5}\varepsilon_{t-1}.$$
Megoldás: Meg kell nézni, hogy invertálható-e az X_t. (Az, mivel $B(z)$ egyetlen gyöke 5, ami az egységkörön kívül van). Az $(X_t, \ldots)$ múlt nyilván ugyanaz, mint az $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)$ múlt. Az utóbbira vett vetület pedig éppen azt jelenti, hogy az X_{t+1} sorfejtésében az első tagot (ez most éppen ε_{t+1}, általában $\beta_0\varepsilon_{t+1}$, azaz $B(z)$ konstans tagjának együtthatója) elhagyjuk. Azaz az $\hat{X}_{t+1}$ vetületre:
$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \ldots \varepsilon_{t+1-j} = \left[\frac{B(z)}{A(z)} - 1\right] \varepsilon_{t+1}.$$
Ez pedig éppen
$$\left[\frac{B(z)}{A(z)} - 1\right] \frac{A(z)}{B(z)} X_{t+1} = \left(1 - \frac{A(z)}{B(z)}\right) X_{t+1},$$
ahonnan fel lehet írni a $\hat{X}_t$ sorelőállítását X_t-ből. A rekurzió pedig:
$$(1 - z/5)\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_{t+1} - (1/5)\hat{X}_t = ((1/10)z^2 + (1/10)z)X_{t+1} = (1/10)X_{t-1} + (1/10)X_t.$$

5. Legyen X_t stacionárius 0 várható értékkel. Lássuk be, hogy az L^2 nagy számok törvénye pontosan akkor igaz, ha
$$\frac{R_X(0) + R_X(1) + \ldots + R_X(n)}{n} \to 0, \tag{1}$$
azaz ha $R_X(k)$ a 0-hoz tart $k \to \infty$ esetén *Césaro középben*. Ebből következik, hogy ha a Q spektrális mérték folytonos a 0-ban, akkor (1) fennáll.
Megoldásvázlat: Az előadáson szerepelt, hogy
$$A_n(u) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{iju} = \frac{1}{n} e^{iu} \frac{e^{inu} - 1}{e^{iu} - 1}$$
ha $u \neq 0$ és 1, ha $u = 0$. Akkor
$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} R_X(j) = \int_{-\pi}^{\pi} A_n(u) Q(du),$$
ahol $A_n(u) \to 0$, $u \neq 0$ és Lebesgue tétele alkalmazható, tehát a jobb oldal limesze $Q(\{0\})$. Azaz az (1) feltétel ekvivalens azzal, hogy $Q(\{0\}) = 0$ amiről pedig már tudjuk, hogy szükséges és elégséges az L^2-beli nagy számok törvényére.

6. Lássuk be, hogy ha $R_X(k) \to 0$, $k \to \infty$, akkor Q *minden* pontban folytonos, azaz $Q(\{\mu\}) = 0$ minden $\mu \in [-\pi, \pi]$-re.

   Megoldásvázlat: Legyen $\mu \in [-\pi, \pi]$ tetszőleges, terjesszük ki periodikusan a Q mértéket és legyen $\bar{Q}(A) := Q(A+\mu)$ minden A Borel-halmazra. Akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_n(u)\bar{Q}(du) = \int_{-\pi}^{\pi} A_n(v-\mu)Q(dv) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_X(j)e^{-ij\mu}.$$

   A jobb oldal az R_X-re tett feltevés miatt 0-hoz tart, a bal oldal az előző feladathoz hasonlóan $\bar{Q}(\{0\}) = Q(\{\mu\})$-höz tart, ami tehát 0.

7. Legyen $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stacionárius sorozat, R kovariancia függvénnyel. Tegyük fel, hogy $R(0) > 0$ és $R(n) \to 0$ ha $n \to \infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor tetszőleges $n \geq 0$ esetén a $\Gamma_n = (R(i-j))_{0\leq i,j\leq n}$ mátrix nem szinguláris.

   (Útmutatás. Gondoljuk meg, hogy ha valamilyen n-re Γ_n szinguláris, akkor $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ az $L^2(\Omega, P)$ véges dimenziós alterét feszíti ki, és így $R(n) \to 0$ maga után vonná $D^2(X_n) \to 0$-t is.)

   Megoldásvázlat: Feltehetjük, hogy $D^2(X_0) = R(0) = 1$. Mivel $\Gamma_n = E(X_0, \ldots, X_n)^T(X_0, \ldots, X_n)$, ha valamely $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ oszlopvektorra $v^T\Gamma_n v = E(v^T(X_0, \ldots, X_n)^T)^2 = 0$, akkor szükségképpen $v^T(X_0, \ldots, X_n)^T = 0$, azaz lineárisan összefüggenek az X-ek. Legyen n_0 a legkisebb n, amire ez bekövetkezik. Legyen az $\langle X_0, \ldots, X_{n_0-1}\rangle$ egy ortonormált bázisa $e_0, \ldots, e_{n_0-1}$. Mivel X_{n_0} előáll $X_0, \ldots, X_{n_0-1}$ lineáris kombinációjaként, a stacionaritás miatt X_{n_0+1} előáll $X_1, \ldots, X_{n_0}$ lineáris kombinációjaként, tehát $X_0, \ldots, X_{n_0-1}$ lineáris kombinációjaként is. Induktív érveléssel látható, hogy $X_n \in \langle X_0, \ldots, X_{n_0-1}\rangle$ minden $n \geq n_0$-ra. Akkor valamely α_j^n, $j = 0, \ldots, n_0 - 1$ súlyokkal $X_n = \sum_{j=0}^{n_0-1} \alpha_j^n e_j$. Viszont itt $\alpha_j^n \to 0$ ha $n \to \infty$ az $R(n) \to 0$ feltevés miatt. Másrészt $D^2(X_n) = 1 = \sum_{j=1}(\alpha_j^n)^2$, ami az előbbiek szerint lehetetlen.

8. Legyen $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stacionárius sorozat, $R(k) = \rho + (1-\rho)1_{\{k=0\}}$ autokovariancia sorozattal, ahol $0 < \rho < 1$. Mekkora az egy lépéses előrejelzés hibájának szórásnégyzete?

   Megoldásvázlat: Először mutatunk ilyen folyamatot. Legyen ε_t fehér zaj, $E\varepsilon_0 = 0$, $E\varepsilon_0^2 = 1 - \rho$, valamint legyen X független tőle, $EX = 0$, $EX^2 = \rho$. Vegyük észre, hogy akkor $X_t := X + \varepsilon_t$-nek éppen az adott függvény az autokovarianciája. A korábbiakból tudjuk, hogy a fehér zaj spektrálsűrűsége $\phi_\varepsilon(u) = 1 - \rho$, $u \in [-\pi, \pi]$, valamint az $Y_t := X$ folyamat spektrális mértéke $2\pi\rho\delta_0$, ahol δ_0 a Dirac-delta a nullában. Tehát akkor a spektrális mérték $Q_X = (1-\rho)\mathrm{Leb} + 2\pi\rho\delta_0$, ahol Leb a Lebesgue-mértékre utal. Keressük az $E[X_0 - \sum_{j\geq1}\psi_j X_{-j}]^2$ infimumát, azaz $E[X + \varepsilon_0 - \sum_{j\geq1}\psi_j X - \sum_{j\geq1}\psi_j\varepsilon_{-j}]^2$ infimumát. Ez utóbbi kifejezés értéke $\rho(1 - \sum_{j\geq1}\psi_j)^2 + 1 - \rho + (1-\rho)\sum_{j\geq1}\psi_j^2 \geq 1 - \rho$. Ha pedig $\psi_j = 1/n$, $j = 1, \ldots, n$-re, akkor értéke $(1-\rho)(1 + n/n^2) = (1-\rho)(1 + 1/n)$, ami tetszőlegesen közel lehet $1 - \rho$-hoz nagy n-re. Tehát a kérdéses hiba szórásnégyzete $1 - \rho$.