4. feladatsor megoldásvázlatok

Az 1-6. feladatokat megbeszéltük.

7. Ugyanaz a feladat, de most $\phi_X(u) = |u|$. (Parciális integrálás.) Nézzük meg a $\phi_X(u) = 1_{u\in[-c,c]}$ indikátorfüggvény esetét is $0 \le c \le \pi$-re! (A $c = \pi$ eset a fehér zaj, ami nagyon egyszerű.)

   Megoldásvázlat: Lényegében ugyanaz, a kulcs a

$$I_1 := \int_0^\pi ue^{iuk}\, du$$

   integrálok kiszámítása, ami parciális integrálással lehetséges. Utána ki kellene számolni a

$$I_2 := \int_{-\pi}^0 -ue^{iuk}\, du$$

   integrált is, ez azonban $v = -u$ változócserével éppen

$$\int_0^\pi ve^{-ivk}\, dv,$$

   ami pontosan I_1 konjugáltja! Ez MINDIG így van, tehát elég 0-tól π-ig kiszámolni az integrált, utána

$$I_1 + I_2 = I_1 + \overline{I}_1 = 2\mathrm{Re}(I_1),$$

   azaz I_1 valós részének kétszerese.

8. A szűrési feladattal foglalkozunk: legyenek S_t, N_t független stac. folyamatok, $ES_t = EN_t = 0$.

   S_t a jel, N_t a zaj; célunk kiszűrni lineáris szűrővel az $X_t = S_t + N_t$ zajos jelből S_t-t a legkisebb négyzetes értelemben optimális módon. Azt a $\psi_k, k \in \mathbb{Z}$ szűrőt nevezzük Wiener-szűrőnek, melyre

$$E[S_t - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_j X_{t-k}]^2$$

   a lehető legkisebb (persze minden t-re ugyanaz a ψ_j sorozat működik, mivel a folyamatok stacionáriusak).

   Legyen $G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k e^{-itk}$ a szűrőegyütthatókkal képzett trigonometrikus sor összege. (Egyébként $G(t) = H(e^{-it})$ ahol $H(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j z^j$ a szűrő úgynevezett *transzferfüggvénye*.)

   Állítás. $R_X(k) = R_S(k) + R_N(k)$, $k \in \mathbb{Z}$; ugyanígy $\phi_X(t) = \phi_S(t) + \phi_N(t)$.

   Tétel. A Wiener-szűrőre igaz, hogy

$$G(t) = \frac{\phi_S(t)}{\phi_S(t) + \phi_N(t)},\ t \in [-\pi, \pi].$$

   Következésképp

$$\psi_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\phi_S(t)}{\phi_S(t) + \phi_N(t)} e^{itk} dt.$$

   Megoldásvázlat: Megbeszéltük.

9. Legyen N_t fehér zaj, $R_N(0) = 1$. Legyen S_t spektrális sűrűségfüggvénye $\phi_S(u) = e^{|u|} - 1$, $u \in [-\pi, \pi]$ Számítsuk ki a Wiener-szűrő együtthatóit!

   Megoldásvázlat: Ekkor N spektrális sűrűségfüggvénye konstans 1. Tehát a képletbe helyettesítve:

$$\psi_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{|u|} - 1}{e^{|u|}} e^{itk} dt.$$

   Az integrandus éppen $(1 - e^{-|u|})e^{itk}$. Itt az e^{itk} integálja 0, ha $k \neq 0$ és 2π ha $k = 0$. A második tag integrálása teljesen hasonló a korábbi integrálásokhoz (de azért végig kell bogarászni).

10. Tegyük meg ezt akkor is ha $S_t = \beta S_{t-1} + \varepsilon_t$ AR(1) folyamat, ahol $\beta \in (-1, 1)$ és ε_t fehér zaj.

Megoldásvázlat: Legyen

$$S_t = \beta S_{t-1} + \varepsilon_t$$

egy AR folyamat, $|\beta| < 1$ és ε_t fehér zaj, melyre $E\varepsilon_t = 0,\ E\varepsilon_t^2 = 1$. Kiszámoltuk, hogy ilyenkor

$$R_S(k) = \frac{\beta^{|k|}}{1-\beta^2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

valamint

$$\phi_S(u) = \frac{1}{1+\beta^2 - 2\beta\cos u},\ u \in [-\pi, \pi].$$

Ebből persze, a definíciók alapján, következik, hogy

$$\frac{1}{1+\beta^2-2\beta\cos u} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{|k|}}{1-\beta^2} e^{-iku}. \tag{1}$$

Ezek után tegyük fel, hogy az N_t folyamat fehér zaj, $EN_t = 0,\ EN_t^2 = \sigma^2 = R_N(0)$. Ekkor, ahogyan azt már láttuk,

$$\phi_N(u) = \sigma^2, \quad u \in [-\pi, \pi].$$

A Winer-szűrő együtthatói legyenek ψ_k. A korábbiak szerint:

$$G(u) = \frac{\phi_S(u)}{\phi_S(u) + \phi_N(u)} = \frac{1}{\sigma^2 + \sigma^2\beta^2 - 2\sigma^2\beta\cos u + 1}. \tag{2}$$

Azt állítom, hogy lehet találni olyan A, γ konstansokat, hogy

$$\frac{A}{1+\gamma^2-2\gamma\cos u} = \frac{1}{\sigma^2+\sigma^2\beta^2-2\sigma^2\beta\cos u + 1}. \tag{3}$$

Valóban, ehhez az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{aligned} 1+\gamma^2 &= A(\sigma^2+\sigma^2\beta^2+1), \\ 2\gamma &= 2A\sigma^2\beta. \end{aligned} \tag{4}$$

Ezt az egyenletrendszert meg tudjuk oldani (másodfokú egyenletre vezet), hiszen σ^2, β ismertek. A két lehetséges γ érték közül azt kell választani, amelyikre $|\gamma| < 1$.

Akkor viszont következik (1)-ból, (2)-ből és (3)-ból, hogy

$$G(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k e^{-iuk} = \frac{A}{1+\gamma^2-2\gamma\cos u} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A\frac{\gamma^{|k|}}{1-\gamma^2} e^{-iuk},$$

vagyis azt kapjuk, hogy

$$\psi_k = A\frac{\gamma^{|k|}}{1-\gamma^2}.$$

11. Mi a helyzet, ha $S_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$? (Legyen most $EN_t^2 = 1$.)

Megoldásvázlat: Most

$$\frac{\phi_S(u)}{\phi_S(u)+\phi_N(u)} = \frac{2+2\cos(u)}{2+2\cos(u)+1} = 1 - \frac{1}{3+2\cos(u)}.$$

Ez ismerős, most is A, γ-t keresünk úgy, hogy

$$\frac{A}{1+\gamma^2-2\gamma\cos u} = \frac{1}{3+2\cos(u)},$$

vagyis $\gamma/A = -1$ és $(1+\gamma^2)/A = 3$, ahonnan A, γ megkapható.