2. feladatsor megoldásvázlatai

A 3.4.6.8. feladatokat megbeszéltük (kivéve a 6-ból a kovarianciát és a spektrális sűrűségfüggvényt, de ezek a következő gyakorlaton lesznek). Az 1. feladatot is, de a 2π konstans hibás volt, ezért most leírom a megoldást helyesen.

1. Legyen U egyenletes eloszlású $[-\pi,\pi]$-n és V tőle független Q eloszlású ($Q([-\pi,\pi))=1$) változó. Mutassuk meg, hogy $X_n=\exp(i(U-nV))/\sqrt{2\pi}$ komplex értékű stacionárius sorozatot definiál, melynek spektrális eloszlása Q, azaz

$$\operatorname{cov}(X_n,X_{n+k})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iku}Q(du),$$

minden $k\in\mathbb{Z}$-re.

Megoldási javaslat: $EX_n=E\exp(iU)E\exp(-inV)/\sqrt{2\pi}$ a függetlenség miatt, tehát $EX_n=0$, hiszen iU egyenletes eloszlású az egységkörön. A várható érték kiszámolási szabálya alapján, és megjegyezve, hogy az U sűrűségfüggvénye $1/(2\pi)$ a $[-\pi,\pi]$ intervallumon,

$$\operatorname{cov}(X_n,X_{n+k})=E[X_n\overline{X_{n+k}}]=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2 2\pi}\int_{[-\pi,\pi)^2}e^{iu-inv-iu+i(n+k)v}du\,dQ(v)=\frac{2\pi}{4\pi^2}\int_{[-\pi,\pi)}e^{ikv}\,dQ(v),$$

amit állítottunk.

2. Legyenek U,U' egyenletes eloszlásúak $(-\pi,\pi)$-n és V egy Q eloszlású, $(-\pi,\pi)$-értékű valószínűségi változó. Legyen a Q mérték szimmetrikus, azaz $Q(H)=Q(-H)$ minden mérhető halmazra. Mutassuk meg, hogy ha U,U',V függetlenek akkor $X_n=(\cos(U-nV)+\sin(U'-nV))/\sqrt{2\pi}$ (valós értékű) stacionárius sorozatot definiál, melynek spektrális mértéke éppen Q. (Útmutatás: használjuk fel, hogy a $\sin$, $\cos$ komplex alakban is felírható.)

Megoldási javaslat: Vegyük észre, hogy

$$\sqrt{2\pi}X_n=\frac{e^{iU-inV}+e^{-iU+inV}}{2}+\frac{e^{iU'-inV}-e^{-iU'+inV}}{2i}.$$

Átrendezve,

$$\sqrt{2\pi}X_n=e^{inV}\left[\frac{e^{-iU}}{2}-\frac{e^{-iU'}}{2i}\right]+e^{-inV}\left[\frac{e^{iU}}{2}+\frac{e^{iU'}}{2i}\right]=:e^{inV}Z_1+e^{-inV}Z_2.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $EZ_1=EZ_2=0$, $\operatorname{cov}(Z_1,Z_2)=0$, $D^2(Z_1)=D^2(Z_2)=1/2$. Nyilván V és Z_1 függetlenségéből $E[e^{inV}Z_1]=EZ_1Ee^{inV}=0$, ugyanígy $E[e^{-inV}Z_2]=0$. Na de akkor kihasználva a kovariancia bilinearitását és a függetlenséget

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(X_n,X_{n+k})\\
=&\ \frac{1}{2\pi}\Big[\operatorname{cov}(Z_1e^{inV},Z_1e^{i(n+k)V})+\operatorname{cov}(Z_1e^{inV},Z_2e^{-i(n+k)V})+\operatorname{cov}(Z_2e^{-inV},Z_1e^{i(n+k)V})+\operatorname{cov}(Z_2e^{-inV},Z_2e^{-i(n+k)V})\Big]\\
=&\ \frac{1}{2\pi}\Big[EZ_1^2e^{inV}e^{i(n+k)V}+EZ_1e^{inV}Z_2e^{-i(n+k)V}+EZ_2e^{-inV}Z_1e^{i(n+k)V}+EZ_2^2e^{-inV}e^{-i(n+k)V}\Big]\\
=&\ \frac{1}{2\pi}\Big[EZ_1^2Ee^{inV}e^{i(n+k)V}+EZ_1Z_2Ee^{inV}e^{-i(n+k)V}+EZ_2Z_1Ee^{-inV}e^{i(n+k)V}+EZ_2^2Ee^{-inV}e^{-i(n+k)V}\Big]\\
=&\ \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\Big[Ee^{inV}e^{i(n+k)V}+Ee^{-inV}e^{-i(n+k)V}\Big]
\end{aligned}$$

Itt az előző feladathoz hasonlóan

$$Ee^{-inV}e^{-i(n+k)V}=\int_{(-\pi,\pi)}e^{iku}Q(du),$$

de mivel Q szimmetrikus, ez egyenlő $Ee^{inV}e^{i(n+k)V}=\int_{(-\pi,\pi)}e^{-iku}Q(du)$-vel is, vagyis

$$\operatorname{cov}(X_n,X_{n+k})=\frac{1}{2\pi}\int_{(-\pi,\pi)}e^{iku}Q(du),$$

ahogyan akartuk.

5. $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ valós stacionárius sorozat, melynek várható értéke nulla, kovariancia függvénye $(R_X(n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Mutassuk meg, hogy ha $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|<\infty$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_kX_k$ sor egy valószínűséggel és L_2-ben konvergens!

$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < \infty$ esetén legyen

$$Y_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X_{n-k}. \tag{1}$$

Fejezzük ki Y kovariancia függvényét R_X-ből, és mutassuk meg, hogy ha $\sum |R_X(m)| < \infty$, akkor $\sum |R_Y(m)| < \infty$ is.

Az (1) operációról azt mondjuk, hogy *az a_n sorozat által adott lineáris szűrőt alkalmaztuk az X_n sorozatra.* Ha $a_k = 0$ minden $k \leq -1$-re akkor a lineáris szűrő *kauzális* (ritkábban: *fizikailag megvalósítható*).

Ha Y_n fehér zaj, akkor elég $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^2 < \infty$-et feltenni, és X_n jól definiált lesz L_2-ben (és egy valószínűséggel is). Ekkor Y_n-t végtelen mozgó átlag folyamatnak hívjuk. Ha véges sok k kivételével $a_k = 0$, akkor "sima" mozgó átlag folyamatról van szó.

Megoldási javaslat: Az L^2-konvergenciához a Cauchy-tulajdonságot igazoljuk, $||\cdot||$ az L^2-normát jelöli. Minden $m \leq n$-ra

$$|| \sum_{j=m}^{n} a_j X_j || \leq \sum_{j=m}^{n} |a_j| ||X_j|| = ||X_0|| \sum_{j=m}^{n} |a_j|,$$

ami nagy m-re tetszőlegesen kicsi. A majdnem mindenütt konvergenciához elég lenne, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| E|X_j| < \infty$$

teljesüljön, ez pedig $E|X_j| \leq ||X_j|| = ||X_0||$ miatt nyilvánvaló. A többi állítás is könnyen igazolható.

7. Legyenek $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ és $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ független gyengén stacionárius folyamatok azonos kovariancia függénnyel és $Z_{2k} = X_k$, $Z_{2k+1} = Y_k$. Legyen ϕ a (közös) spektrális sűrűségfüggvény, egyszerűség kedvéért teljesüljön $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |R_X(k)| < \infty$ is. Mutassuk meg, hogy Z stacionárius. Hogyan kapható meg a kovariancia függvénye X és Y közös kovariancia függvényéből? Hogyan fejezhető ki Z spektrális sűrűsége ϕ-ből?

Megoldásvázlat: Láthatóan $R_Z(k) = 0$ ha k páratlan és $R_Z(k) = R_X(k/2)$ ha k páros. Ennek megfelelően a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} R_Z(k) e^{-iuk} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} R_X(k) e^{-2iuk},$$

azaz $\phi_Z(u) = \phi(2u)$, ahol $\phi(u)$-t 2π szerint periodikusan kiterjesztettük a számegyenesre. Azaz az eredeti ϕ-vel kifejezve: $\phi_z(u) = \phi(2u)$ ha $0 \leq u \leq \pi/2$ és $\phi_Z(u) = \phi(2u - 2\pi)$ ha $\pi/2 < u \leq \pi$, valamint a párosság miatt nyilván $\phi_Z(-u) = \phi_Z(u)$, ha $-\pi \leq u < 0$.